UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

ESCOLA DE FILOSOFIA, LETRAS E CIÊNCIAS HUMANAS

LUCIANO CARVALHO CARDOSO

Infinitude e Rupturas no Logicismo de Gottlob Frege

Guarulhos

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

LUCIANO CARVALHO CARDOSO

Infinitude e Rupturas no Logicismo de Gottlob Frege

Projeto de pesquisa apresentado ao Programa de Pós-Graduação de Doutorado em Filosofia da Universidade Federal de São Paulo.

Prof.: Marcelo Silva de Carvalho

LINHA DE PESQUISA:

Metafísica, Ciência e Linguagem

Guarulhos

2020

Cardoso, Luciano Carvalho

Infinitude e Rupturas no Logicismo de Gottlob Frege / Luciano Carvalho Cardoso. – Guarulhos: [s.n.], 2020.

188 f.

Orientador: Marcelo Silva de Carvalho.

Dissertação (Doutorado) – Universidade Federal de São Paulo, Escola de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Guarulhos, 2020.

Título em Inglês: Infinity and Ruptures in Gottlob Frege´s Logicism.

1. Infinitude 2. Número 3. Pensamento

LUCIANO CARVALHO CARDOSO

INFINITUDE E RUPTURAS NO LOGICISMO DE GOTTLOB FREGE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal de São Paulo como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Filosofia.

Orientador: Marcelo Silva de Carvalho

Aprovado em: (dia) (mês) de 2020.

Prof. Dr.

Instituição

Prof. Dr.

Instituição

Prof. Dr.

Instituição

Prof. Dr.

Instituição

Dedico essa dissertação à Emilia, Dionísio e Alice, cujo amor, coragem e força para viver são uma contínua fonte de inspiração e persistência Vocês estão gravados no solo eterno do meu coração.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Unifesp e à Capes pela oportunidade e apoio para desenvolver esse trabalho e, principalmente, a meu orientador, Marcelo Silva de Carvalho, cuja paciência, orientação e inspiração contínua foram imprescindíveis para o desenvolvimento dessa pesquisa.

Resumo

A construção do Logicismo Fregiano, enquanto abordagem que redefine as leis que fundamentam o pensamento e a aritmética, é reconhecida por fundamentar-se sobre a negação da intuição e por estruturar uma lógica de primeira e segunda ordem em conformidade com a lógica extensional de modo que o fundamento das verdades aritméticas se configuram como analíticos. Em seus últimos trabalhos, publicados apenas postumamente, Frege definirá uma abordagem distinta para o Logicismo. Agora fundamentado em uma fonte de conhecimento geométrico, que recorre parcialmente ao fundamento lógico do conhecimento, o novo modelo Fregiano parece reconhecer a importância da intuição nesse processo. O objetivo desse trabalho consiste em demonstrar o itinerário de construção do Logicismo Fregiano, as contradições que viriam a surgir na medida em que Frege amadurecia seu sistema, as rupturas que a Infinitude acarretou e como, após a constatação de inconsistência de seu sistema, Frege o reestrutura em um modelo prototípico de matemática unificada.

Palavras-chave: Aritmética; Pensamento; Conceitos; Enumerabilidade; Infinitude.

Abstract

The construction of Fregian Logicism, as an approach that redefines the laws that underlie thought and arithmetic, is recognized for being grounded in the denial of intuition and for structuring a first and second order logic in accordance with extensional logic so that The foundation of arithmetic truths is configured as analytical. In his later works, published only posthumously, Frege will define a distinct approach to Logicism. Now grounded in a source of geometric knowledge, which partly relies on the logical foundation of knowledge, the new Fregian model seems to recognize the importance of intuition in this process. The aim of this paper is to demonstrate the path of construction of Fregian Logicism, the contradictions that would arise as Frege matured his system, the disruptions that Infinity caused and, after finding his system inconsistent, Frege restructures into a prototype model of unified mathematics.

Keywords: Arithmetic; Thought; Concepts; Enumerability; Infinity.

Sumário

Introdução

O trabalho desenvolvido por Gottlob Frege, desde 1879, com a publicação do *Begriffschrift* (conhecida como *Conceitografia* ou *Ideografia*), enfrentou grandes desafios para se posicionar diante de seus principais interlocutores. Seu logicismo, ao expressar as proposições da aritmética em um contexto declarado por ele como analítico, se contrapõe ao cânone estabelecido por Kant, para quem a aritmética era sintética *a priori*, ou a ideia de natureza empírica, como J. Stuart Mill sustentava. Ao contrário, as proposições do logicismo expressavam verdades da pura lógica. Entretanto, não o fazia como um aparato instrumental operatório e mecânico, ou mesmo como o pressuposto analítico leibniziano da *mathesis universalis*, estruturado em uma fixa relação de sujeito-predicado. Com o intuito de fundamentar os juízos aritméticos e científicos, e justificar a emissão de tais juízos, Frege pretendia estabelecer o fundamento dos enunciados e do próprio pensamento, em leis ordenantes, de natureza lógica e, portanto, analíticas. Fundar o logicismo nesse pressuposto implicava, inexoravelmente, desenvolver uma nova linguagem, similar à *lingua characteristica* de Leibniz, mas com um escopo estrito de expressar as leis fundamentais do pensamento. Desta feita, Frege estabelece um dinâmico maquinário para fundamentar o Logicismo em relação aos desafios que se apresentam no processo de formulação.

A presente dissertação baseou-se na metodologia de análise bibliográfica de três obras fundamentais no desenvolvimento do logicismo fregiano. O trabalho de Frege tem início em 1879, com a publicação do *Begriffschrift,* ou *Conceitografia*, obra inaugural que apresenta os fundamentos de sua linguagem formular que, conforme o próprio Frege dirá, exerce o papel semelhante ao do microscópio em relação ao olho. Este, tal qual à linguagem comum, ou natural, é flexível e se presta a muitas tarefas mas, em relação à precisão de trabalhos específicos, apresenta ambiguidades e confusão. Para trabalhos dessa natureza, o microscópio, ou sua linguagem formular, seria mais precisa. Essa linguagem formular, que visa se distanciar das ambiguidades da linguagem natural, apresenta, de acordo com Frege, inúmeras inovações em relação às formulações lógico-matemáticas do período, e visa resolver um conjunto de problemas que não lograram ser resolvidos de outra forma. Algumas dessas inovações consistem:

1. Substituição do sujeito-predicado, base dos enunciados e proposições desde Aristóteles, pela relação função-argumento;

2. Apresentação de uma lógica de segunda ordem que abriga os operadores lógicos existenciais, os quantificadores universais e superordenantes;

3. As bases para o cálculo de predicados;

4. Um conjunto axiomático de regras determinantes do comportamento operatório;

5. Adoção da lógica extensional como fundamento de sua linguagem ideográfica.

Frege defendeu a eficácia de sua linguagem em relação a outras desenvolvidas na época, como a de Boole e Peano, além de comparar sua linguagem com a abordagem leibniziana. Para Frege, Boole e Peano haviam desenvolvido um *calculus ratiocinator*, um método de cálculo mecânico proposicional. Em comparação a essas abordagens, a *Conceitografia* fregiana seria o que ele denominou *lingua characterica*, diferente da *lingua characteristica* leibniziana em seu escopo. Enquanto para Leibniz sua linguagem seria de âmbito universal, para Frege ela teria o âmbito das relações matemáticas e lógicas.

Em 1884, Gottlob Frege publicou *Grundlagen der Arithmetic*, ou *Os Fundamentos da Aritmética*, obra em que define os principais elementos que passam a compor o logicismo. O ponto principal de Frege, em *Os Fundamentos*, consiste em estabelecer esses parâmetros em um viés mais filosófico, uma vez que sua linguagem conceitual já se encontra formulada, e ele o faz de forma a se contrapor com alguns dos pressupostos tácitos da lógica clássica. Primeiramente, Frege reforça sua recusa da estrutura básica do silogismo fundamentado nas relações entre sujeito e predicado.

Para Frege, a distinção entre sujeito e predicado seria gramatical, e não formal. Tampouco elas teriam algum efeito no que diz respeito ao conteúdo judicável da proposição. Impacto direto para o pensamento de Kant é o desdobramento dessa abordagem para as categorias proposicionais, igualmente relegadas à estrutura gramatical. Ademais, essa estrutura, baseada na linguagem, abre margem para ambiguidades, na medida em que indistintamente permite que os termos se alternem de posição de acordo com a vontade de quem formula o enunciado. Essa flexibilidade, própria da linguagem, produz, entretanto, inúmeros equívocos. Um desses equívocos nos levaria a conceber os números como predicados aplicados aos objetos das proposições. A estrutura de linguagem construída sobre a relação sujeito-predicado funciona como uma máscara que ocultaria a estrutura lógica dos enunciados, fundamental para a veiculação do pensamento, bem como das relações aritméticas. O trabalho de Frege em *Os Fundamentos da Aritmética* tem como um de seus objetivos desmascarar esse equívoco, pelo menos em relação à Aritmética, e definir a natureza dos números como objetos lógicos, e não como predicados. Os números, abordados como predicados, assumem o comportamento dos mesmos, sendo confundidos com conceitos, enquanto são dispostos pela linguagem de base sujeito-predicado. Essa abordagem permitiria, no limite, o surgimento das interpretações do empirismo e do psicologismo a respeito da Aritmética.

Porém, definir as relações Aritméticas pelas leis lógicas, como Frege pretende, o leva a confrontar a definição clássica de Kant acerca da natureza das relações Aritméticas. Embora Kant estabeleça, na *Crítica da Razão Pura* (1781), que todas as proposições matemáticas sejam *a priori*, isto é, independentes da experiência, o autor também afirma que todos os juízos estabelecidos sejam de natureza *sintética*, e as poucas proposições de natureza *analítica* seriam algumas presentes na Geometria, mas com função restrita. A posição de Kant gera problemas em relação à de Frege em fundamentar a Aritmética nas leis lógicas, pois a lógica, tanto para Kant como para Frege, é alicerçada em conhecimentos e verdades analíticas. Por fim, o terceiro ponto de contraposição de Frege em relação a Kant se dá contra o recurso da *intuição* como fonte de validação dos conhecimentos aritméticos, enquanto conhecimentos cujos juízos são sintéticos *a priori*. É sobretudo contra ela que Frege estende seus argumentos em 1884 para justificar a necessidade da Aritmética dever seus conhecimentos e verdades ao campo analítico, e não ao sintético *a priori*.

Essas três negações de Frege (recusa da estrutura sujeito-predicado, da origem sintético *a priori* da Aritmética e recusa da intuição como forma de apreensão das relações Aritméticas), constituem os pilares do logicismo fregiano desenvolvido a partir dos *Fundamentos da Aritmética*.

Após um conjunto de artigos fundamentais, escritos entre 1891 e 1892 ("Função e Conceito", "Sobre o Sentido e a Referência" e "Sobre o Conceito e o Objeto"), nos quais Frege clarifica as noções de conceito-objeto e função-argumento, por um lado, e amplia a distinção entre sentido e referência de uma proposição, ele publica, em 1893, a assim considerada por ele como sua obra máxima, *As Leis Básicas da Aritmética*, obra em que implementa todas as inovações presentes em seus artigos anteriores, além de apresentar uma versão axiomática completa dos elementos presentes nos *Fundamentos*, de 1884. Além de desenvolver demonstrações de todos os princípios formais e filosóficos que havia debatido nos trabalhos anteriores, e de desenvolver uma teoria dos conjuntos, Frege apresenta inovações, como considerar não apenas objetos como extensões de conceitos, mas também percursos de valores como extensões conceituais. Apesar da demonstração de Bertrand Russell de que o logicismo sistematizado nessa obra, quando da publicação, em 1902, do segundo volume das *Leis Básicas da Aritmética*, era inconsistente, esse trabalho continua tendo relevância, devido a todo o rigor e profundidade conceitual, de maneira que tanto Russell, quanto Frege e, posteriormente, neologicistas, procuram desenvolver uma derivação da identidade dos números que não necessite recorrer à igualdade de percursos de valores de primeira ordem, o que incorre na teoria dos conjuntos presente na Lei Básica V, que ocasionou a inconsistência no sistema fregiano. No período posterior aos debates suscitados, na tentativa de corrigir a inconsistência, Frege teria se dedicado a projetos de caráter mais filosófico, com o conjunto de artigos que deveria compor a obra inacabada *Investigações Lógicas*. Em contrapartida, nos escritos póstumos datados de 1923 a 1925, Frege converge seus pensamentos novamente a esses pontos, e há uma suspeita de que sua reflexão o leva a reconsiderar a natureza da Aritmética, e a defini-la, possivelmente, como *sintética a priori*. Para sermos mais exatos, em seus textos, o que fica ainda mais explícito é o reconhecimento da necessidade de recorrermos à *intuição* para fundamentarmos a Aritmética:

> Tive de abandonar a visão de que a aritmética não precisa apelar para a intuição nem em suas provas, entendendo por intuição a fonte geométrica de conhecimento, isto é, a fonte da qual fluem os axiomas da geometria (FREGE, G. A New Attempt at a Foundation for Arithmetic, pg. 278).[1]

Essa afirmação, extraída de um de seus últimos escritos, datado de 1924-25, apresenta um ponto de vista contundente e evidentemente distinto da fundamentação da Aritmética e do Logicismo que foi construído e consolidado ao longo de toda sua obra. As implicações da adoção da intuição no que tange às provas dos *Fundamentos da Aritmética* indicam que Frege, em seus últimos trabalhos, estaria se posicionando ao lado da definição kantiana de que a aritmética compartilharia dos juízos sintéticos da geometria.

Considerando que Frege, em todos os trabalhos posteriores aos *Fundamentos*, equipara a fundamentação da Aritmética à fundamentação do pensamento, uma vez que ambos compartilhariam das mesmas leis lógicas, convém determo-nos nessas passagens e buscarmos uma melhor compreensão do significado das recusas de Frege em 1884 e quais os contextos que conduziriam Frege a reconsiderar sua posição. Também empreenderemos algumas considerações sobre os possíveis impactos para o

---

[1] I have had to abandon the view that arithmetic does not need to appeal to intuition either in its proofs, understanding by intuition the geometrical source of knowledge, that is, the source from which flow the axioms of geometry. Recently, a vivious confusion has arisen over the use of the word ´axiom´. I therefore emphasize that I am using this word in its original meaning (FREGE, G. A New Attempt at a Foundation for Arithmetic, pg. 278).

Logicismo nas reflexões tardias de Frege, registradas nos escritos póstumos a partir de 1920.

O percurso que estabelecemos para essa investigação consiste em reconstituirmos, primeiramente, o projeto logicista fregiano, buscando estabelecer conexões com os principais interlocutores que contribuíram para o desenvolvimento do processo, suas problemáticas e dificuldades que impulsionaram o desenvolvimento nas etapas fundamentais em que elementos conceituais fortes foram inseridos. Dessa forma, no Capítulo 1 analisaremos a influência do projeto leibniziano sobre a notação ideográfica de Frege, em 1879, e como a herança desse projeto gerou proximidades e distanciamentos cruciais para a fundamentação da aritmética. A seguir, o segundo elemento que impulsionou o desenvolvimento do logicismo fregiano foi a própria concepção analítica da aritmética, defendida por Frege em 1884. Identificaremos os pontos de ruptura com o projeto kantiano a respeito da aritmética, a recusa de Frege em absorver quaisquer caminhos que o conduzissem a uma apreensão dos números mediante a intuição ou percepção sensível e como, em decorrência dessa recusa, Frege constrói o espaço lógico e as relações de segundo nível. Ainda nessa abordagem, buscaremos explorar o problema da identidade dos números, e como Frege recorre a Leibniz como fonte para solução do problema, ainda que por definição.

No Capítulo 2, buscaremos traçar três situações problemáticas decorrentes dos elementos componentes do projeto logicista estabelecidos nos *Fundamentos da Aritmética*, e que se encontram relacionados com a infinitude, nos moldes da definição estabelecida desde 1879. Os problemas seriam a infinitude dos sentidos, a infinitude extensional dos conceitos e a impossibilidade de formalização de um conjunto totalizante de todos os conjuntos, característica do infinito absoluto de Frege. Essas três problemáticas acarretariam a inconsistência do logicismo fregiano, expressa pelo paradoxo de Russell, em 1902.

O Capítulo 3 é destinado a explorar as tentativas de resolução da inconsistência apresentada no capítulo anterior. A abordagem de Russell, que considera os conjuntos como aglomerados compósitos de um conceito, a abordagem do Princípio de Hume, que permitiria fixar a identidade dos números apenas mediante relações de segundo nível e o princípio de Leibniz, que permitiria estabelecer a identidade extensional mediante a paridade de valores de verdade de um percurso de valor. Analisaremos o modo pelo qual Frege rejeita todas as possibilidades, dadas as inconsistências que cada uma acarreta. Diante dessas dificuldades, seguiremos o itinerário que Frege principia a criar a partir de 1918, culminando na versão prototípica de uma nova fundamentação da Aritmética esboçada em 1924.

Acreditamos que esse itinerário nos permite compreender os últimos movimentos de Frege em seus escritos póstumos, não apenas como uma ruptura radical com o logicismo, mas sim como um processo contínuo de demonstrar como seria possível desenvolver um projeto inicialmente proposto por Leibniz, mas como uma realidade intrínseca à própria estrutura da lógica e do pensamento. Nesse processo, como Frege reconhecerá em seus escritos finais, o infinito se manifesta como o nó górdio que faz emergir todas as inconsistências da proposta logicista, o que o leva a investigar as possibilidades de se manter o logicismo, a partir de uma ruptura radical em alguns pontos, mas incluindo a intuição e os princípios geométricos em um processo mais amplo, que seria modelarmente construído sobre o sistema de superfície gaussiana.

Para a presente dissertação, foram utilizadas as versões em português ou inglês dos textos, acompanhadas, quando possível, das versões originais em alemão, para que dúvidas conceituais a respeito dos termos e sua formalização no trabalho fregiano fossem devidamente comparadas. Da mesma forma, quando os títulos dos textos fregianos já possuem uma tradução reconhecida e empregada regularmente em língua portuguesa, optamos por mantê-las em nosso idioma.

Capítulo 1 - A recusa fregiana da intuição na constituição dos *Fundamentos da Aritmética*

1.1 A herança leibniziana na formação do projeto logicista

Gottlob Frege é, hoje, considerado um dos fundadores do logicismo e da filosofia analítica. Da necessidade de fundamentar a própria matemática, Frege se lançou à lógica, com o intuito de retirá-la da psicologia e do empirismo. As mudanças de Frege, desde a introdução da *função* como forma de cálculo de predicados na *Conceitografia (Begriffsschrift,* 1879), substituindo o binômio sujeito-predicado, além de todas as inovações acerca dos conceitos, transformou a lógica. Todas as mudanças realizadas por Frege no decorrer de suas obras não se devem apenas à introdução de métodos ou de alguns elementos complementares à lógica, mas sim a uma nova forma de articular o pensamento, no intuito de definir a relação entre verdade e lógica de forma mais adequada do que até então havia sido possível.

De acordo com Santos (2008):

> A lógica funda, admitiria Frege, a arte de pensar corretamente, na exata medida em que das leis lógicas podem ser derivadas prescrições sobre como pensar de acordo com a verdade, mas ela o faz na qualidade de ciência do ser verdadeiro enquanto tal. A uma ciência impõe-se, antes de tudo, elucidar o conteúdo de seus conceitos primitivos e a natureza de seus objetos mais característicos. À lógica impõe-se, antes de tudo, elucidar o conceito de verdade e a natureza daquilo a que mais diretamente dizem respeito as leis do ser verdadeiro, aquilo a que mais propriamente se aplica esse conceito (SANTOS, L.H.L dos. O Olho e o Microscópio, pg. 42).

A lógica, aos tempos de Frege, encontrava-se dividida em duas escolas muito distintas. De um lado, encontramos a lógica anti-formalista e empirista de John Stuart Mill (1806-1873) e seus seguidores como Sigwarth (1830-1904) e Lipps (1851-1947), na Alemanha. Do outro, temos a lógica relacionando-se com a matemática, como vemos em De Morgan (1806–1871), Boole (1815-1864), Peirce (1839–1914) e Peano (1858–

1932) que, fazendo uso da junção de elementos da álgebra e da aritmética com a lógica, conseguiram ampliar os horizontes desta para além daquilo que a lógica formal clássica e a lógica empirista conseguiam alcançar.

A aproximação de ambas, lógica e matemática, todavia, se deu em momentos e direções diferentes. Em um primeiro movimento, a matemática se apresentará como um instrumento de auxílio e ampliação da lógica. Em um segundo momento, contrariamente, a lógica servirá de suporte para a matemática, encontrando um ponto de equilíbrio no pensamento de Frege. Esse segundo momento se dá em meados do século XIX quando, no núcleo da própria Matemática, surge uma necessidade de fundamentação, na qual a Lógica será buscada, para justificar e demonstrar a validade dos axiomas matemáticos.

Inúmeras descobertas da época foram cruciais para abalar os alicerces da crença sobre a auto-validação da aritmética. Dentre elas, podemos destacar principalmente a questão da concepção de conjuntos transfinitos, desenvolvida pela Teoria dos Conjuntos de Georg Cantor, além da fundamentação empírica da aritmética oferecida por John Stuart Mill. Para Kneale,

> Uma vez que dúvidas foram jogadas sobre a fiabilidade da intuição espacial como uma fonte de conhecimento matemático, tornou-se necessário reexaminar todas as provas atualmente aceites, e o resultado foi uma reconstrução radical da matemática por homens como Cauchy e Weierstrass. Já foi dito, de fato, que nada foi satisfatoriamente comprovado na análise antes do século XIX. Agora tanto na análise como na geometria o rigor exige a formulação explícita de tudo que é essencial para uma demonstração. E assim encontramos a atenção dirigida, no século XIX, para as fórmulas que fornecem definições implícitas dos vários tipos de expressões numéricas (KNEALE & KNEALE. The Development of Logic, pg. 400)[2].

[2] When once doubt had been thrown on the reliability of spatial intuition as a source of mathematical knowledge, it became necessary to re-examine all the currently accepted proofs, and the result was a radical reconstruction of mathematics by such men as Cauchy (1789-1857) and Weierstrass (1815-97). It hás been Said, indeed, that nothing was satisfactorily proved in analysis before the nineteenth century. Now in analysis, Just as in geometry, rigour requires the explicit formulation of everything essential to a demonstration; and so we find attention directed in the nineteenth century to the formulae which provide implicit definitions of the various types of numerical expressions (KNEALE & KNEALE. The Development of Logic, pg. 400).

Essas fórmulas, que se tornaram uma exigência de rigor no século XIX, tanto atuam como regra de cálculo quanto como axiomas que, por um lado, estabelecem as diretrizes e caminhos que se deve seguir e, por outro, podem ser uma fundamentação de todo conjunto de conhecimentos que ganham espaço nesse período, sendo, no primeiro caso, orientados pelas leis gerais da lógica e, no segundo caso, devendo seu próprio fundamento e origem às mesmas leis gerais. Kneale questiona os critérios que levaram à adoção dos axiomas e das fórmulas, decorrentes desse procedimento:

> Se estas fórmulas são consideradas como regra de cálculo ou como axiomas a partir dos quais os teoremas devem ser calculados de acordo com as leis gerais da lógica não é de grande importância, desde que sejam estabelecidos plenamente e reconhecidos como fundamentais. Mas é natural que se pergunte por que deve ter apenas estas fórmulas. Existe alguma necessidade inerente ao curso do desenvolvimento que nos levou a adotá-las? Ou elas são convenções da nossa própria criação, sugeridas, na verdade, por um interesse na descrição da natureza ou por um desejo de generalidade abstrata na própria matemática, mas incapaz de prova, precisamente porque são apenas convenções? Estas questões foram suscitadas no século XIX e ainda são debatidas em nossos dias[3] (KNEALE & KNEALE. The Development of Logic, pg. 401).

Essas questões circunstanciais, demarcadas pelo surgimento de inúmeros paradoxos, demandaria a necessidade de fundamentar a aritmética em uma base que não dependesse de questionamentos ou arbitrariedades.

De acordo com Blanché:

> Pedir à lógica, convenientemente renovada que assegure os alicerces da matemática, convida bastante naturalmente a

[3] Whether these formulae are regarded as special rules of calculation of axioms from which theorems are to be derived in accordance with general laws of logic is of no great importance, provided they are set out fully and recognized to be fundamental. But it is natural to ask why we should have Just these formulae. Is there some inherent necessity in the course of development which has led us to adopt them? Or are they conventions of our own making, suggested indeed by an interest in the description of nature or by a desire for abstract generality in mathematics itself, but incapable of proof precisely because they are Just conventions? These questions were raised in the nineteenth century and are still debated in our own day (KNEALE & KNEALE. The Development of Logic, pg. 401).

> prosseguir aquém dos limites habituais da matemática o trabalho de regressão na formalização dedutiva e a tentar fazer derivar o conjunto das noções e das verdades matemáticas a partir das noções e das verdades propriamente lógicas (BLANCHÉ, R. História da Lógica, pg. 306).

É nesse contexto de fundamentação que se insere a lógica de Frege. Este não pretendia, como anteriormente se propôs, utilizar a lógica como ferramenta ou auxiliar, mas essencialmente como o fundamento da matemática. Cronologicamente, a obra de Frege inicia-se em 1879, com a publicação do *Begriffsschrift* (*Conceitografia* ou *Ideografia*). A proposta de Frege, nessa obra, é desenvolver uma linguagem que, de fato, se distinga da linguagem ordinária, fornecendo uma estrutura mais precisa para se formular as proposições e, consequentemente, os juízos. Um dos pontos mais cruciais a respeito da abordagem criteriosa de Frege no processo de formulação do logicismo consistiu em garantir o princípio central euclidiano do rigor como um parâmetro. Em diversas passagens, Frege toma Euclides e o método euclidiano como referências para seu próprio trabalho[4]. De acordo com Burge (1984)[5], trata-se dos mesmos princípios que fundamentam o Racionalismo, o que denotaria o comprometimento de Frege como um racionalista. Esses princípios surgem como fatores que orientam os procedimentos de Frege na formulação de sua lógica, e consistem de dois pressupostos básicos. O primeiro consiste no fato de que Frege acredita que há verdades autoevidentes. O segundo é que todas as verdades autoevidentes podem ser compreendidas e justificadas racionalmente, o que inclui toda a justificação dos juízos da aritmética. De acordo com Burge (1992):

> Frege assume que apenas verdades são autoevidentes. Ele também assume que é racional acreditar no que é autoevidente, dado que é bem compreendido. Frege acredita em outros tipos de justificação puramente matemática para juízos aritméticos, além de autoevidência e derivação de verdades autoevidentes. Mas esses

[4] Vide, por exemplo, o Prólogo às *Leis Básicas da Aritmética*, bem como o escrito póstumo "Sobre a Geometria Euclidiana". É mediante o endosso de Frege à abordagem euclidiana, por exemplo, que sua crítica ao trabalho de David Hilbert é tecida, alicerçada no fato de que seu modo de construção da matemática e da lógica moderna não respeitavam esses princípios.

[5] BURGE, T. Frege on Extensions of Concepts From 1884 to 1903.

> outros tipos também envolvem apenas a razão. A ideia-chave no que se segue é que Frege supõe que podemos conhecer a aritmética e seus fundamentos puramente através da razão, e que o indivíduo é razoável e justificado em acreditar em verdades fundamentais básicas[6] (BURGE, T. Frege On Knowing the Third Realm, 1992, pg. 634).

Assim, dessa forma, ao considerar a aritmética como fundamentada na razão e em verdades lógicas e autoevidentes, Frege se aproximará da abordagem de Leibniz para fundamentar formalmente a aritmética, em contraste com a abordagem kantiana, que concebia a aritmética como dependente da intuição para se fundamentar.

De acordo com Kneale & Kneale (1980), Leibniz, no conjunto de seu programa filosófico, teria desenvolvido, de forma mais ou menos integrada, cinco grandes áreas de interesse:

> (1) seu respeito pela lógica tradicional; (2) sua noção de uma *ars combinatória,* ou teoria geral dos agrupamentos; (3) seus planos para a construção de uma linguagem ideal; (4) seu programa para a coordenação do conhecimento por meio de uma enciclopédia; e (5) as esperanças por ele depositadas em uma ciência geral do método.[7] (Kneale & Kneale, The Development of Logic, pg. 321).

Uma das grandes preocupações de Leibniz consistia em desenvolver uma *lingua ou characteristica universalis* que representasse simbolicamente tudo o que pudéssemos conceber em relação a um dado sujeito. De acordo com Kneale & Kneale (1980), essa ideia tinha uma conotação específica para Leibniz. Para ele, o desenvolvimento de uma *lingua universalis* e um *calculus ratiocinator* era uma exigência natural de duas

[6] Frege assumes that only truths are self-evident. He also assumes that it is rational to believe what self-evident, given that it is well understood. Frege believes in other types of purely mathematical justification for arithmatical judgements besides self-evidence and derivation from self-evident truths. But these other types also involve only reason. The key Idea in what follows is that Frege assumes that we can know arithmetic and its foundations purely through reason, and that individuals are reasonable and justified in believing basic foundational thruths (BURGE, T. Frege On Knowing the Third Realm, 1992, pg. 634).

[7] (1) His respect for tradicional logic, (2) his notion of na *ars combinatoria*, or general theory of arrangements, (3) his plans for na ideal language, (4) his scheme for the coordination of knowledge in na encyclopaedia, and (5) his hope for a general science of method (Kneale & Kneale, The Development of Logic, pg. 321).

necessidades: a primeira seria o entendimento de que todo predicado está contido em um sujeito, ou, no que tange à máxima adotada por ele, *Praedicatum inest subjecto*. O segundo motivo consiste na necessidade que Leibniz demonstrava de constituir um projeto ainda mais amplo, o de sua *Ars combinatoria*, que demandava, posta sua plena consecução, o desenvolvimento de um alfabeto que tinha por primazia ser realmente básico e completo e, não obstante, todas as possíveis combinações fossem, sem exceção, levadas em conta. De acordo com Kneale:

> Ao final de sua vida considerava a teoria das combinações como algo mais fundamental que a lógica ordinária, porém, por *ars combinatoria,* não entendia simplesmente um arsenal de regras destinadas a calcular o número de subconjuntos de um certo tipo que se poderiam formar a base dos membros de um conjunto dado[8] (Idem, pg. 325).

Dessa forma, sua arte combinatória exigia a existência de um alfabeto, ou língua formal que permitisse que, potencialmente, todas as combinações fossem possíveis. No entanto, a limitação de Leibniz na relação sujeito-predicado o levou a conceber de forma limitada uma lógica das relações, o que lhe permitiu desenvolver vinte e quatro tipos de silogismo que dessem conta das supostas combinações.

Gottlob Frege foi declaradamente influenciado por essa abordagem leibniziana, de modo que ele a enuncia explicitamente no Prólogo da *Conceitografia*, de 1879. Podemos considerar, na verdade, que o logicismo desenvolvido por Frege seria uma resposta direta a Leibniz. Haddock (2006) menciona que, na *Conceitografia*, além de enunciar seu projeto de desenvolvimento de uma *linguagem artificial* ao estilo de Leibniz, ele, na verdade, pretende resolver os problemas que impediram Leibniz de concluir a tarefa. Segundo Haddock:

---

[8] To the end of his life he thought of the theory of combinations as something more fundamental than ordinary logic; but he meant by the phrase *ars combinatoria* more than the rules for calculating the number of sub-sets of a certain constitution which may be formed from the members of a given set (Idem, pg. 325).

> (...) Frege argumenta corretamente que grande parte do desenvolvimento científico tem sua origem em uma mudança metodológica. Finalmente, Frege faz uso da autoridade de Leibniz, que reconheceu cerca de dois séculos antes das vantagens de uma linguagem artificial mais adequada para propósitos científicos do que os nossos naturais, sem estar totalmente consciente de suas dificuldades. Além disso, Frege considera que os simbolismos aritméticos, geométricos e químicos são realizações parciais do cálculo conceitual de Leibniz. Assim, Frege vê sua conceitografia, em certo sentido, como um passo na mesma direção, mas com a peculiaridade que diz respeito à região central do conhecimento, a saber, a lógica, que está conectada com toda e qualquer outra região do conhecimento [9] . (HADDOCK, G.E.R. A Critical Introduction to the Philosophy of Gottlob Frege, pg. 03)

Frege partilha com Leibniz a ideia de que, uma vez que toda verdade é autoevidente, uma linguagem capaz de demonstrar o fundamento analítico dessas relações é fundamental, o que faz com que sua iniciativa não seja, de modo algum, desprovida de complexidades.

Frege estava ciente das limitações que o projeto ambicioso de Leibniz estava submetido. De acordo com Kneale & Kneale, o maior obstáculo de Leibniz no desenvolvimento de seu projeto se deveu principalmente por considerar que todas as relações se resumem à atribuição de predicados a sujeitos (*continens e continentibus)*, o que lhe causou inúmeras limitações, sendo a principal delas o não reconhecimento das próprias relações entre os elementos. Dessa maneira, todas as relações possíveis ou já estavam dadas pela análise do sujeito (verdades analíticas) ou determinadas pela mente divina (verdades contingentes). Ademais, a visão restritiva de Leibniz o conduzia a interpretar todas as relações como um procedimento de cálculo fundamentado mecanicamente no princípio de não contradição. Disposto a desenvolver operacionalmente uma linguagem operatória, o projeto fregiano se pautou, desde seu

[9] Moreover, Frege correctly argues that a great part of scientific development has its origin in a methodological change. Finally, Frege makes use of the authority of Leibniz, who had recognized some two centuries before the advantages of an artificial language more adequate for scientific purposes than our natural ones, without being totally conscious of its difficulties. Moreover, Frege considers that arithmetical, geometrical and chemical symbolisms are partial fulfilments of Leibniz's conceptual calculus. Thus, Frege sees his concept-script in some sense as a step in the same direction, but with the peculiarity that it concerns the central region of knowledge, namely, logic, which is connected with each and every other region of knowledge (HADDOCK, G.E.R. A Critical Introduction to the Philosophy of Gottlob Frege, pg. 03).

princípio, a evitar o mesmo percurso de Leibniz. De acordo com Gabbay e Woods (2004), entretanto, boa parte das críticas e interpretações destinadas a Leibniz aos tempos de Frege, e mesmo posteriormente, estavam influenciadas pelo fato de que os textos de caráter lógico de Leibniz só seriam publicados postumamente e, ainda assim, de forma incompleta. Somente a partir de meados de 1980, por exemplo, que quatro concepções a respeito da lógica leibniziana vieram à tona:

> - A interpretação "intensional" de conceitos é equivalente (ou isomórfica) à moderna interpretação extensional;
> - A "álgebra de conceitos" de Leibniz é equivalente (ou isomórfica) à álgebra de conjuntos de Boole;
> - A teoria de Leibniz dos "conceitos indefinidos" constitui uma importante antecipação da moderna teoria da quantificação;
> - O "cálculo universal" de Leibniz permite, em várias formas, a derivação das leis da teoria do silogismo[10]. (Gabbay e Woods, The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege, pg. 09, 2004).

Entretanto, uma vez não dispondo desses dados, Frege encontrou nos princípios leibnizianos gerais, fundamentados na ideia de um *calculus ratiotinator,* uma *lingua universalis* e uma *ars combinatoria,* um caminho para justificar a aritmética, bem como o pensamento, mediante uma estratégia fundamentalmente lógica. O modelo de cálculo proposicional desenvolvido por ele, e que seria o núcleo operacional de seu logicismo, possui um conjunto de características que conectam a lógica com a matemática.

10

- The ´intensional´ interpretation of concepts is equivalent (or isomorphic) to the modern extensional interpretation;
- Leibniz´s ´algebra of concepts´ is equivalent (or isomorphic) to Boole´s álgebra of sets;
- Leibniz´s theory of ´indefinite concepts´ constitutes na important anticipation of modern quantifier theory;
- Leibniz´s ´universal calculus´ allows in various ways the derivation of the laws of the theory of the syllogism (Gabbey e Woods, The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege, pg. 09, 2004).

A fim de resolver os problemas centrais que impediam uma abordagem completa do pensamento leibniziano, Frege estabelece uma tricotomia cuja distinção e proporção, em Leibniz, não era encontrada da mesma maneira como veremos distribuída no logicismo fregiano: Matemática - Lógica - Linguagem Natural. Principalmente nos escritos defensivos pós *Conceitografia*, Frege indica que autores como Jevons, Boole, dentre outros, aproximaram a lógica da matemática, com o intuito de salvaguardar a primeira das ambiguidades da linguagem natural. Frege, ao contrário, aproximaria a matemática da lógica, para salvaguardar ambas da linguagem natural. De acordo com Frege:

> Não era meu desejo apresentar uma lógica abstrata através de fórmulas, mas expressar um conteúdo mediante sinais escritos de maneira mais clara e precisa do que seria possível por palavras. Com efeito, desejava produzir não um mero *calculus ratiocinator*, mas uma *lingua characterica* em sentido leibniziano; mas, para tal realização, reconheço que um cálculo dedutivo é uma parte necessária de uma *Conceitografia*. (FREGE, G. Sobre a Finalidade da Conceitografia, pg. 67)

Essa posição Leibniz não teria conseguido atingir, por não conseguir se desvencilhar da linguagem natural presente na própria lógica aristotélica.

O projeto fregiano delinearia três pontos fundamentais para atingir os objetivos enunciados por Frege no período da escrita de sua *Conceitografia*. Primeiramente, o projeto fregiano tem como ponto de partida a dissolução do binômio sujeito-predicado, e o substitui pelos elementos lógicos função - argumento[11]. Diferente da relação sujeito e predicado, o que os mantém necessariamente unidos não constitui uma atribuição predicativa de um sujeito, mas sim a complementaridade de uma função por um argumento. Funções, para Frege, são insaturadas, e necessitam de um complemento para formarem um enunciado completo. Esse complemento é o argumento que, diferente da função, é um elemento saturado. Essa estrutura baseada na saturação é fundamental para a constituição da linguagem operatória desenvolvida na

[11] Somente nos artigos “Função e Conceito” e “Sobre Conceito e Objeto” Frege estabelecerá o isomorfismo formal entre função e argumento com conceito e objeto, estabelecendo, dessa forma, a conexão entre as leis da aritmética e as do pensamento.

Conceitografia, pois, uma vez que as posições entre função e argumento não são intercambiáveis, a estrutura criada possui o mecanismo inerente à lógica extensional, dado que todo o conjunto de argumentos que satisfaça determinada função será considerado extensão dessa função, e corresponde à base fundamental do que Frege nomeará, ainda em uma forma rudimentar, de *conteúdo asserível*. Essa mecânica extensional desenvolvida por Frege apresenta um eco (ou um isomorfismo, principalmente se considerarmos como correta a observação de Gabbay e Wood, mencionados anteriormente) com a *Ars Combinatoria*, de Leibniz, pois a quantidade de objetos que cai sob uma função (sua extensão) determina todas as acepções em que um conceito pode ser tomado.

O segundo ponto consistiu no desenvolvimento da linguagem conceitual que permitiria evidenciar a cadeia lógica de pensamento, sem que as distorções da linguagem comum impedissem a correta compreensão. Dessa forma, conforme Frege:

> A apreensão de uma verdade científica passa, normalmente, por vários estágios de certeza. Com efeito, conjeturada inicialmente a partir de um número talvez insuficiente de casos particulares, uma proposição geral torna-se mais e mais solidamente estabelecida ao se relacionar com outras verdades mediante cadeias de inferências - seja porque dela se derivam conclusões que são confirmadas por outros modos, seja, pelo contrário, por ela se afigurar uma conclusão de proposições já estabelecidas[12]. (FREGE, G. Prefácio à Conceitografia, pg. 43)

Esse objetivo procedural, no entanto, não deixa de esbarrar no problema que já mencionamos da distorção produzida pelo próprio emprego da linguagem, veículo pelo qual necessitamos recorrer a fim de expressar o pensamento e nossas cadeias de inferências. O objetivo de Frege, já em 1879, demonstrava seu alinhamento com o modo euclidiano de estabelecimento matemático, ou seja, a construção de cadeias de inferências sem lacunas. Frege pretende, com isso, demonstrar a fundamentação da

[12] Das Erkennen einer wissenschaftlichen Wahrheit durchläuft in der Regel mehre Stufen der Sicherheit. Zuerst vielleicht aus einer ungenügenden Zahl von Einzelfällen errathen, wird der allgemeine Satz nach und nach sicherer befestigt, indem er durch Schlussketten mit andern Wahrheiten Verbindung erhält, sei es dass aus ihm Folgerungen abgeleitet werden, die auf andere Weise Bestätigung finden, sei es dass er umgekehrt als Folge schon feststehender Sätze erkannt wird (FREGE. G. Die Begriffschrift, pg. 201)

aritmética mediante unicamente o emprego de inferências lógicas. Procedimento esse que não logrou sucesso até que ele desenvolvesse a linguagem formular que possibilitasse a demonstração de inferências, bem como suas relações causais, sem lacunas. Afirma Frege:

> Entretanto, quando indago a qual destas duas espécies [de verdade] pertencem os juízos aritméticos, devo de início investigar até que ponto se procede em aritmética apenas por inferências [formais], pelo uso tão somente das leis do pensamento que transcendem a todas as particularidades. A via que segue, no que tange a essa indagação, foi a seguinte: tentei reduzir o conceito de sucessão em uma sequência (Anordnung in eine Reihe) à noção da consequência lógica (logische Folge), para daí poder estabelecer o conceito de número. Para evitar que nessa tentativa se intrometesse inadvertidamente algo de intuitivo, cabia tudo reduzir a uma cadeia inferencial (Schlusskette) carente de qualquer lacuna. Mas ao tentar realizar essa exigência da forma a mais rigorosa possível, deparei-me com o obstáculo da insuficiência da linguagem [corrente]: além de todas as dificuldades inerentes ao manuseio das expressões, à medida que as relações se tornavam mais complexas, tanto menos apto me encontrava para atingir a exatidão exigida. Tal dificuldade levou-me a conceber a presente *Conceitografia*[13] (FREGE, G. Idem, pgs. 44-45).

O terceiro ponto estabelecido por Frege para realizar seu intento foi fundamentar sua *Conceitografia* em axiomas que permitiram a construção do cálculo proposicional, bem como de um núcleo e instâncias que possibilitaram tanto o emprego de quantificadores universais como a quantificação existencial. Para que esse maquinário funcionasse, Frege estava transportando a concepção de fundo de que todas as verdades apresentadas na *Conceitografia*, bem como todas as regras de inferência ali desenvolvidas na forma dos nove axiomas, se constituiam em uma conjuntura analítica.

---

[13] Indem ich nun die Frage vorlegte, zu welcher dieser beiden Arten die arithmetischen Urtheile gehörten, musste ich zunächst versuchen, wie weit man in der Arithmetik durch Schlüsse allein gelangen könnte, nur gestützt auf die Gesetze des Denkens, die über allen Besonderheiten erhaben sind. Der Gang war hierbei dieser, dass ich zuerst den Begriff der Anordnung in einer Reihe auf die *logische* Folge zurückzuführen suchte, um von hier aus zum Zahlbegriff fortzuschreiten. Damit sich hierbei nicht unbemerkt etwas Anschauliches eindrägen könnte, musste Alles auf die Lückenlosigkeit der Schlusskette ankommen. Indem ich diese Forderung auf das strengstte zu erfüllen trachtete, fand ich ein Hindernis in der Unzulänglichkeit der Sprache, die bei aller entstehenden Schwerfälligkeit des Ausdruckes doch, je verwickelter die Beziehungen wurden, desto weniger die Genauigkeit erreichen liess, welche mein Zweck verlangte. Aus diesem Bedürfnisse ging der Gedanke der vorliegenden Begriffschrift hervor. (FREGE. G. Die Begrifschrift, pg. 202)

De acordo com Boghossian (2017), a abordagem de Frege se dá especificamente no contexto do debate a respeito da analiticidade da verdade *a priori* de enunciados. Para ele, a analiticidade pode ser abordada por duas formas: metafisicamente ou epistemologicamente. Em sua análise, tanto a abordagem metafísica quanto a epistemológica partem do princípio que uma verdade a respeito do significado se dá *a priori*. A questão que é colocada é: “o que poderia nos possibilitar manter uma sentença factual verdadeira a priori?” (BOGHOSSIAN, P. Analyticity: Metaphysical or Epistemological? pg. 581). Pela abordagem metafísica, toda afirmação verdadeira *a priori* acarreta um fato e, como tal, tal fato é sempre verdadeiro. Percebemos isso mediante a faculdade da *intuição,* distinta dos cinco sentidos, que nos permite chegar a crenças justificadas sobre as propriedades do mundo. Mediante o exercício da faculdade da intuição nós somos capazes de conhecer *a priori* tais verdades, bem como aquelas que dizem respeito à matemática. Em contrapartida, a abordagem epistemológica ignora a possível realidade factual oriunda dos enunciados, e toma-os por si mesmos e suas implicações em termos de significados. Algo é verdadeiro em virtude de seus significados, considerados isoladamente, de modo a justificar a crença em seus valores de verdade. O exemplo citado por Boghossian seria o de Frege, que definiria *a priori* os valores de verdade mediante uma sinonímia de termos.

Para realizar esse procedimento, Frege empreende uma abordagem fundamentada em uma lógica extensional, no intuito de definir a analiticidade dos juízos lógicos a respeito da aritmética. O debate entre lógica extensional e intensional é fundamental em Frege e assume um aspecto diferencial em seu pensamento, uma vez que ele não desconsidera nenhuma das abordagens, mas estabelece uma relação entre elas, que tende a se consolidar cada vez mais em seu pensamento maduro. O comprometimento de Frege com a lógica extensional já aparece no exemplo mencionado anteriormente. Quando se indaga a respeito da natureza dos juízos aritméticos, o que lhe interessa são as inferências formais, pelo uso tão somente das leis do pensamento que transcendem a todas as particularidades. Em prosseguimento dessa abordagem, que consiste na reconstrução sem lacunas de todas as inferências que conduzem a uma verdade aritmética, se encontra um engajamento com a concepção de que o fundamento dos juízos aritméticos é analítico. Posição corroborada pelo próprio método adotado por Frege, no qual, primeiramente, ele condiciona a noção de *sucessão numérica* à *sequência numérica* e, a seguir, procura reduzi-las ao conceito de *consequência lógica*. Esse procedimento visa, como o próprio Frege afirma, evitar ao máximo toda e qualquer intromissão inadvertida de qualquer elemento *intuitivo*. Embora Frege não evoque explicitamente a abordagem kantiana da questão (algo do qual não deixará de fazê-lo em 1884), fica claro que os juízos aritméticos são concebidos em 1879 como sendo analíticos, desprovidos de qualquer elemento intuitivo em suas cadeias de inferências, que deveriam ser capazes de serem reconstituídas tão somente pelas leis do pensamento. Frege estava tão certo disso que ele não atribui em nenhum momento que suas dificuldades em conseguir êxito nessa reconstituição poderiam se dever à possibilidade do fundamento dos juízos aritméticos ser sintético *a priori,* por exemplo. Antes, ele atribui a dificuldade à ambiguidade da linguagem comum. Essa dificuldade o motivou a desenvolver toda sua linguagem conceitual, sendo ela, portanto, muito mais um meio para demonstrar a analiticidade dos juízos aritméticos do que um fim em si mesma. Para Haddock (2006), a possibilidade do juízo sintético *a priori* nem mesmo permeava as duas formas possíveis de reconhecimento de uma verdade científica. De acordo com ele:

> Assim, Frege divide todos os enunciados que requerem uma fundamentação em dois grupos, nomeadamente: (i) aqueles cuja prova pode ser obtida em um meio puramente lógico, e (ii) aqueles cuja prova tem sido baseada na experiência. Portanto, nessa classificação de enunciados em seu trabalho inicial, não há lugar para o sintético *a priori* introduzido um século antes por Kant.[14] (HADDOCK; G.E.R. A Critical Introduction of Gottlob Frege, pg. 02)

Essa concepção se expressa na estrutura de fundo da linguagem formal de Frege, mediante os elementos nucleares da *Conceitografia*, o que ele denomina *conteúdo judicável* e *conteúdo conceitual.* Na linguagem desenvolvida por Frege, conteúdo

[14] Thus, Frege divides all statements that require a foundation in two groups, namely: (i) such whose proof can be obtained in a purely logical way, and (ii) such whose proof has to be based on experience. Thus, in this classification of statements in his early work, there is no place for the synthetic a priori introduced a century earlier by Kant. (HADDOCK; G.E.R. A Critical Introduction of Gottlob Frege, pg. 02)

conceitual é todo conteúdo expresso pelo “—“ e que, de acordo com Frege, possui todo conteúdo que é passível de juízo, mas que é apenas enunciado. Em contrapartida, o conteúdo judicável asserido, é todo conteúdo que possui valor de verdade, expresso no juízo. Na *Conceitografia*, Frege expressa o conteúdo judicável como todo conteúdo seguido do sinal `$\vdash$´ e que, de acordo com o autor, implica dizer que o conteúdo asserido é *um fato*. A característica desse conteúdo conceitual no conjunto de sua linguagem é expressa da seguinte forma:

> Pode-se imaginar uma linguagem na qual a proposição: ‘Arquimedes morreu na tomada de Siracusa’, poderia expressar-se da seguinte maneira: ‘a morte violenta de Arquimedes na tomada de Siracusa é um fato’[15]. (FREGE, G. *Conceitografia*, § 3, pg. 7)

Entretanto, Haddock chama atenção para um fato curioso no exemplo dado por Frege. De acordo com ele:

> Frege diria que as declarações (a) "Arquimedes morreu na conquista de Siracusa", (b) "Arquimedes morreu na conquista de Siracusa é um fato" e (c) "A morte violenta de Arquimedes na conquista de Siracusa é um fato" tem o mesmo conteúdo conceitual. Como "é um fato" não acrescenta nada ao conteúdo de uma declaração, (a) e (b) claramente têm o mesmo sentido, como concebido por Frege em "Über Sinn und Bedeutung" e "Grundgesetze der Arithmetik". Mas (c) só pode ter o mesmo sentido que (a) e (b) se confundirmos a noção de conteúdo judicável, a partir da qual as noções oficiais de sentido e referência foram obtidas, e que é especialmente próximo da noção oficial de sentido de uma afirmação, com a noção de conteúdo conceitual.[16] (HADDOCK, G.E.R.; Idem, pg. 07)

---

[15] Es lässt sich eine Sprache denken, in welcher der Satz: ,, Archimedes kam bei der Eroberung von Syrakus um`` in folgender Weise ausgedrückt würde: ,,der gewaltsame Tod des Archimedes bei der Eroberung von Syrakus ist eine Thatsache´´. (FREGE. G. Die Begriffschrift, pg. 211).

[16] Frege would say that the statements (a) ‘Arquimedes died in the conquest of Syracuse’, (b) ‘Arquimedes died in the conquest of Syracuse is a fact’ and (c) ‘The violent death of Arquimedes in the conquest of Syracuse is a fact’ have the same conceptual content. Since ‘is a fact’ does not add anything to the content of a statement, (a) and (b) clearly have the same sense, as conceived by Frege in ‘Über Sinn und Bedeutung’ and Grundgesetze der Arithmetik. But (c) can only have the same sense as (a) and (b) if we conflate the notion of judgeable content, from which the official notions of sense and reference were obtained, and which is especially close to the official notion of sense of a statement, with the notion of conceptual content (HADDOCK, G.E.R.; Idem, pg. 07).

No entanto, elas poderiam ser *expressas* da mesma forma se considerarmos, como Frege o fará de forma mais declarada em seus trabalhos posteriores, que elas são expressas em uma linguagem que privilegie a lógica extensional e as relações formais entre seus elementos básicos constitutivos. Isso se dá porque, desde seus primeiros escritos, Frege busca separar as características da linguagem que relacionam a mensagem entre ouvinte e falante daquilo que ele denomina *conteúdo conceitual*, do qual se extrai o conteúdo judicável de uma proposição. Parte das características semânticas da linguagem natural não são consideradas para o âmbito das relações extensionais entre os elementos das proposições, ainda que contribuam para o sentido destas. Porém, as relações extensionais estão fundamentadas em leis enraizadas na ideia de verdades autoevidentes, cujas relações independem de algumas características gramaticais ou semânticas, mas que são dependentes de uma fundamentação analítica que se expressa no juízo.

Isso nos remete novamente à influência leibniziana no trabalho de Frege, notadamente em 1879 e 1884. O compromisso de Frege com a analiticidade e que, de acordo com Gao (2011), se refere ao compromisso de Frege com o racionalismo, parece similar ao de Leibniz, para quem sua teoria da verdade se estruturava em juízos analíticos, onde um enunciado verdadeiro era sempre verdadeiro, e todos os valores de verdade sobre todos os enunciados eram, em algum nível, analíticos[17]. Russell (1992) observa esse fato e chama atenção a ele como sendo uma peculiaridade que permite a Leibniz construir uma lógica e uma metafísica que englobam todos os fenômenos enquanto resultantes de substâncias que, em suas atividades contínuas, são responsáveis causais de todas as relações. E o faz recorrendo à ambiguidade de trabalhar os enunciados em duas instâncias: por um lado, as cadeias de inferências relativas a um sujeito não podem ser conhecidas por nós apenas pela análise, o que leva a razão a buscar inferências que serão, na melhor das hipóteses, conhecidas ou assinaladas por

[17] The notions of concepts, functions and their course-of-values are regarded as self-evident to Frege, about which he holds a rationalist’s view. (GAO, Sicun, “Why is Hume’s Principle not good enough for Frege?”, pg. 03)

ocasião da experiência. Por outro lado, em uma instância divina, todas as inferências já estão dadas, na mente de Deus. Afirma Russell:

> A distinção importante ocorre entre as proposições dedutíveis da lógica e das proposições não tão dedutíveis; o primeiro pode ser definido de forma vantajosa como "analítico", o último como "sintético". Leibniz considerou que, para Deus, todas as proposições são analíticas (...) (RUSSELL, B. The Philosophy of Leibniz, pg. XVII)[18]

Essa concepção faz com que Leibniz considere, de forma diversa de Aristóteles, que não apenas os predicados estão contidos no sujeito, mas que todos os predicados possíveis estão contidos nos sujeitos. De acordo com Leibniz:

> O conceito completo ou perfeito de uma substância individual contém todos os seus predicados, passado, presente e futuro. Pois certamente é verdade agora que um futuro predicado é futuro e, portanto, está contido no conceito da coisa. (LEIBNIZ, W apud STRICKLAND, L. The Shorter Texts of Leibniz, pg. 06)[19]

O que se pode notar é um contínuo isomorfismo entre a metafísica, epistemologia e a lógica leibniziana, cujas convergências nem sempre são percebidas em toda a estruturação das concepções empregadas por ele. Por um lado, temos uma concepção metafísica pela qual cada substância possui propriedades que lhe pertencem, que configuram o que ela é, bem como seus limites, ainda que não tenham se manifestado como fenômeno. Não são de todo conhecidas pela razão humana, mas são conhecidas e reunidas na mente de Deus. Dessa conjuntura metafísica parece derivar uma epistemologia na qual o conhecimento de todas as verdades é possível mediante o uso tão somente da razão, conhecido como princípio da razão suficiente que, nesse caso,

[18] The important distinction is between propositions deducible from logic and propositions not so deducible; the former may advantageously be defined as “analytic,” the latter as “synthetic.” Leibniz held that, for God, all propositions are analytic(...) (RUSSELL, B. The Philosophy of Leibniz, pg. Xvii)

[19] The complete or perfect concept of an individual substance contains all of its predicates, past, present and future. For certainly it is true now that a future predicate isfuture, and so is contained in the concept of the thing. (LEIBNIZ, W apud STRICKLAND, L. The Shorter Texts os Leibniz, pg. 06)

abrange todas as relações possíveis entre as substâncias, enquanto unidades, e suas propriedades, em qualquer tempo possível. Por fim, o modo pelo qual é possível tal conhecimento se dá pela lógica, essa entendida como a linguagem que nos permite estabelecer toda a cadeia de inferências entre o sujeito e todos os seus predicados. Essa é a conclusão a que chega Strickland (2006), Russell (1992) e De Risi (2007). A esse respeito Strickland comenta:

> O que o princípio da razão suficiente diz, de fato, é que há sempre uma razão pela qual uma verdadeira proposição é verdadeira, a razão de ser claro, na visão de Leibniz, que, em verdadeiras proposições, o conceito do predicado está contido no conceito de sujeito (pensar na proposição 'um homem mortal é mortal' descrito acima, e como o fato de que o predicado pertence ao sujeito explica por que a proposição é verdadeira). Assim, foi por causa desta teoria da verdade que Leibniz reivindicou que uma substância não era meramente um sujeito dos predicados, como Aristóteles tinha reivindicado, mas de todos os predicados que poderiam verdadeiramente ser atribuídos a ele; ou seja, porque o conceito de tudo o que pode ser verdadeiramente predicado de uma substância já deve estar contido no conceito dessa substância para que seja verdadeiramente predicado em tudo. Os conceitos de substâncias devem, portanto, estar completos. (STRICKLAND, idem, pg. 07).[20]

Considerar que o sujeito não é apenas um sujeito de predicados, mas um sujeito de *todos* os predicados apresenta ainda mais um agravante em Leibniz: o fato de que, em uma cadeia causal entre todos os elementos que constituem os predicados dos sujeitos existe uma inifinitude de cadeias de relações. Para Leibniz, cada elemento de uma cadeia de predicados implica uma análise causal de relações com outros predicados, resultando em um processo de análise infinita de todas as relações, se pretendermos

[20] What the principle of sufficient reason says, in effect, is that there is always a reason why a true proposition is true, the reason of course being, in Leibniz's view, that in true propositions the concept of the predicate is contained in the concept of the subject (thinkof the proposition 'a mortal man is mortal' described above, and how the fact that the predicate belongs to the subject explains why the proposition is true). Thus it was because of this theory of truth that Leibniz claimed a substance was not merely a subject of predicates, as Aristotle had claimed, but of all the predicates that could truly be ascribed to it; namely because the concept of whatever can be truly predicated of a substance must already be contained in the concept of that substance in order for it to be truly predicated at all. The concepts of substances must therefore be complete. (STRICKLAND, idem, pg. 07).

estabelecer uma análise sem lacunas. Obviamente, não seria possível, portanto, para a mente humana comportar toda a análise dos elementos que compõem o mundo. Embora, ao menos em teoria, não seja impossível.

Russell observa, a respeito desse ponto, a relação que Leibniz busca estabelecer entre a matemática e seu cálculo infinitesimal e a infinita relação analítica entre os predicados:

> Matemática, e especialmente o cálculo infinitesimal, influenciou muito a filosofia de Leibniz. As verdades que chamamos de contingentes são, segundo ele, aquelas em que o sujeito é infinitamente complexo, e apenas uma análise infinitamente prolongada pode mostrar que o predicado está contido no sujeito. Cada substância é infinitamente complexa, pois tem relações com todos os outros, e não há denominações puramente extrínsecas, de modo que cada relação envolve um predicado de cada um dos termos relacionados. Segue-se que "cada substância singular envolve todo o universo em sua noção perfeita" (opusculos, p. 521). Para nós, por conseguinte, as proposições sobre determinadas substâncias são apenas empiricamente detectáveis; Mas para Deus, que pode abarcar o infinito, eles são tão analíticos como a proposição "triângulos equiláteros são triângulos." (RUSSELL, B. The Philosophy of Leibniz, pg. XVI)[21]

Para a lógica leibniziana, que concebe a infinitude como constituinte compósito de cada elemento no universo, como parte de uma infinitude de cadeias analíticas, o papel de Deus, como um fator metafísico extrínseco a toda infinitude, é fundamental enquanto unificador de todos os sujeitos e predicados e suas relações. O recurso metafísico do divino é o que faz com que a lógica leibniziana conceba o infinito como infinito atual, e não potencial, pois todo o infinito se encontra encerrado e reunido na mente de Deus.

Essa questão para nós é de suma importância, pois a questão do infinito, resolvida por Leibniz ao recorrer a um elemento metafísico imbuído de divindade, também será uma

[21] Mathematics, and especially the infinitesimal calculus, greatly influenced Leibniz’s philosophy. The truths which we call contingent are, according to him, those in which the subject is infinitely complex, and only an infinitely prolonged analysis can show that the predicate is contained in the subject. Every substance is infinitely complex, for it has relations to every other, and there are no purely extrinsic denominations, so that every relation involves a predicate of each of the related terms. It follows that “every singular substance involves the whole universe in its perfect notion” (Opuscules, p. 521). For us, accordingly, propositions about particular substances are only empirically discoverable; but to God, who can grasp the infinite, they are as analytic as the proposition “equilateral triangles are triangles.” (RUSSELL, B. The Philosophy of Leibniz, pg. Xvi)

questão relativamente problemática para Kant e, consequentemente, para Frege. Na verdade, especificamente para Frege, dado que a forma pela qual ele aborda a questão o priva dos recursos utilizados por Leibniz e, posteriormente, por Kant.

Se, como vimos até o momento, o projeto logicista de Frege, entre os anos de 1879 a 1884 remetem ao projeto leibniziano de fundamentação da aritmética, torna-se compreensível que Frege, ao constituir a *Conceitografia*, já evidencie a desconsideração em relação aos juízos sintéticos *a priori*, mesmo tendo se passado um século de desenvolvimento da filosofia kantiana. Não obstante a isso, nos *Fundamentos da Aritmética*, Frege discutirá diretamente a questão, apresentando a fundamentação analítica da aritmética como alternativa à abordagem kantiana de fundamento sintético *a priori* da aritmética. Para compreendermos a crítica de Frege, apresentaremos a seguir uma aproximação da estruturação kantiana do problema.

1.2 A Concepção Kantiana de Intuição no Processo de Construção dos Juízos

As bases do pensamento de Frege concebidas em sua linguagem passariam por algumas modificações, mas seriam o fundamento para o desenvolvimento do projeto *logicista*, cuja principal proposta consistia na fundamentação da matemática pela lógica, e que encontra um ponto alto na publicação, em 1884, dos *Grundlagen der Arithmetik* (*Os Fundamentos da Aritmética*), trabalho que estabelece uma ampla discussão com as correntes do empirismo e da psicologia vigentes na época. Essa obra de Frege apresenta um forte intento de combater as principais correntes filosóficas vigentes no período. Combate o empirismo e o método mecanicista e agregacionista, representado por J. S. Mill. Ataca o psicologismo e o subjetivismo. E, nesse processo, o logicismo fregiano se contrapõe, de forma crucial, à corrente kantiana. Resolver o problema colocado pela necessidade de estabelecer os *Fundamentos da Aritmética* implica em posicionar Kant em um pivô condicional a respeito das verdades analíticas ou sintéticas *a priori* encontradas na Aritmética. Como Frege o expressa:

> Se de outros pontos de vista e de maneira fundamentada concluirmos que os princípios da Aritmética são analíticos, isso testemunhará também em favor de sua demonstrabilidade e da definibilidade do conceito de número. As razões em favor do caráter *a posteriori* destas verdades terão um efeito contrário[22]. (FREGE, G. Os *Fundamentos da Aritmética*, §4)

Essa passagem estabelece as condições iniciais de partida do autor na busca da demonstrabilidade e da definição do conceito de número. Essa necessidade de definibilidade é o motor condicional da investigação. A demonstração, a exemplo de Euclides, evidencia para Frege o arcabouço lógico oculto sob as tentativas de explicar os números empiricamente ou gramaticalmente. O erro do empirismo consiste em acreditar que os números se definem por seu caráter abstrato de representar a agregação mecânica de objetos concretos. Caráter de abstração, no entanto, que torna indemonstrável o conceito de número, sempre submetido às condições concretas e arbitrárias da experiência ou mesmo das condições psicológicas que influenciariam essa representação. Já o erro da linguagem seria tomar o número como propriedade dos sujeitos, representando-os como predicados que atribuem uma quantidade ao sujeito de um enunciado qualquer. Essa atribuição, todavia, não escapa do contexto da representação entre linguagem e mundo.

Portanto, atender ao critério de demonstrabilidade do conceito de número implica a exclusão de quaisquer considerações *a posteriori* como forma de conhecimento ou demonstração do conceito de número. A questão epistemológica envolvida nessa investigação, por si só, justifica a adoção dos conceitos kantianos de *a priori, a*

---

[22] Wenn sich nämlich von andern Gesichtspunkten aus Gründe dafür ergeben, dass die Grundsätze der Arithmetik analytisch sind, so sprechen diese auch für deren Beweisbarkeit und für die Definirbarkeit des Begriffes der Anzahl. Die entgegengesetzte Wirkung werden die Gründe für die Aposteriorität dieser Wahrheiten haben. Deshalb mögen diese Streitpunkte zunächst einer vorläufigen Beleuchtung unterworfen werden. (FREGE. G. Die Grundlagen der Arithmetik, §4)

posteriori, analítico e sintético, pois elas adentram a questão do juízo e das condições de aferição de verdade:

> As distinções entre *a priori* e *a posteriori*, sintético e analítico, concernem, a meu ver, não ao conteúdo do juízo, mas à justificação da emissão do juízo. Pois onde não há esta justificação, desaparece também a possibilidade daquela divisão. Um erro *a priori* é neste caso algo tão absurdo quanto, digamos, um conceito azul. Se uma proposição é, em meu sentido, chamada de *a posteriori*, ou de analítica, estão em julgamento não as condições psicológicas, fisiológicas e físicas que tornam possível formar na consciência o conceito do juízo, nem tampouco a maneira como alguém mais, talvez erroneamente, chegou a tomá-la por verdadeira, mas sim aquilo sobre o que se assenta mais fundamentalmente a justificação de ser ela tomada como verdadeira[23]. (FREGE, G. *Fundamentos da Aritmética*, §3)

A justificativa dos referidos juízos evidencia o nível de validade destes, na medida em que sinaliza para o tipo de verdade a ser asserida. Se a justificativa for enraizada nas leis lógicas gerais e definições, a demonstração seguirá pela via dos conhecimentos analíticos. Se a demonstração necessitar de conhecimentos e verdades fora do campo da lógica geral, evidenciará um juízo sintético. E, por fim, se a justificativa necessitar recorrer a questões de fato, suas verdades são indemonstráveis, recorrendo a objetos determinados. A indemonstrabilidade das verdades referentes às questões de fato, caso nos quais se enquadram o empirismo, o mecanicismo e o psicologismo, estão no campo *a posteriori* de juízos. Explicar o conceito de número por essa via torna impossível a demonstração dos juízos, da justificação dos mesmos e das supostas verdades da Aritmética. Por esse motivo, Frege a recusa, reconhecendo que, no limite, resultaria em uma questão de relativismo. O relativismo ao qual nos referimos reflete

---

[23] Jene Unterscheidungen von apriori und aposteriori, synthetisch und analytisch betreffen nun nach meiner) Auffassung nicht den Inhalt des Urtheils, sondern die Berechtigung zur Urtheilsfällung. Da, wo diese fehlt, fällt auch die Möglichkeit jener Eintheilung weg. Ein Irrthum apriori ist dann ein ebensolches Unding wie etwa ein blauer Begriff. Wenn man einen Satz in meinem Sinne aposteriori oder analytisch nennt, so urtheilt man nicht über die psychologischen, physiologischen und physikalischen Verhältnisse, die es möglich gemacht haben, den Inhalt des Satzes im Bewusstsein zu bilden, auch nicht darüber, wie ein Anderer vielleicht irthümlicherweise dazu gekommen ist, ihn für wahr zu halten, sondern darüber, worauf im tiefsten Grunde die Berechtigung des Fürwahrhaltens beruht. (Idem, §3)

uma questão basilar para Frege, motivo pelo qual a demonstração se torna tão relevante, e consiste na necessidade de se fixar a identidade dos números e relações aritméticas universalmente.[24] De que maneira, porém, esse relativismo poderia se estender ao pensamento kantiano, no que diz respeito à fundamentação da aritmética?

Kant, ao mesmo tempo que foi um dos maiores expoentes da filosofia moderna, também foi continuamente criticado pela filosofia dos séculos XIX e XX. Sem dúvida, os conceitos centrais desenvolvidos na *Crítica da Razão Pura* se tornaram o patamar de onde as maiores discussões filosóficas dos séculos subsequentes partiram. Coffa (2003) afirma que, de Bolzano aos físicos modernos, todos, de certa forma, buscaram provar que Kant não fora capaz de resolver todos os problemas de forma satisfatória com seu sistema de entendimento da razão pura. A escola de Viena, naquilo que Coffa denominou a *tradição semântica*, ao contrário dos demais, não buscou apenas demonstrar as possíveis falhas de Kant em resolver os problemas, em especial do significado e dos conceitos, mas resolvê-los por si mesma. No entanto, para fazer isso, era necessário se desvencilhar da forma como Kant os resolvera, o que implicava descobrir e esclarecer os pontos centrais nos quais o pensamento kantiano se ancora. De certa forma, o mecanismo filosófico desenvolvido por Kant para explicar as limitações da Razão Pura estava alicerçado naquilo que ele denominou de *intuição pura*, e que teria, como característica significativa, o movimento conhecido como a "virada copernicana". Uma das questões centrais da *Crítica da Razão Pura* tem como foco o juízo tal como aparece na ciência. O juízo, nessa situação, fundamenta o conhecimento científico. Para Kant, existem dois pressupostos para que um juízo seja *a priori*: ele

[24] Essa preocupação de Frege aparece como um mote em diversas roupagens em sua obra. Na *Conceitografia*, aparece como a ameaça da ambiguidade da linguagem. Nos *Fundamentos da Aritmética*, surge como a necessidade de se construir uma identidade unitária e analítica para os números, em “Sobre o Sentido e a Referência”, justifica a distinção sentido, referência e ideia (esta tomada como interpretação subjetiva e privada, portanto, relativa), enquanto que nas *Leis Básicas da Aritmética*, surge na metáfora do alienígena, cujas concepções numéricas não permitiriam uma permuta entre nossas concepções. Contra todas essas roupagens, o logicismo deveria atuar como o preventivo que nos permitiria assegurar a universalidade das identidades numéricas e das leis do pensamento.

precisa possuir *universalidade* e *necessidade*[25]. Um conhecimento necessário, mas que não seja universal é um conhecimento restrito, que não pode ser compartilhado em todos os casos. Mas, em contrapartida, um conhecimento que seja universal, mas que não seja necessário não é válido, pois podemos resolver problemas sem que haja necessidade de utilizá-lo. Porém, dadas essas condições, esbarramos no problema do conhecimento. Esse problema, de cunho epistemológico, consiste em definirmos como se dá o conhecimento na razão humana. Podemos engendrar conhecimento que preencha as lacunas de universalidade e necessidade? Para Kant, a resposta é afirmativa, pois existem três formas de conhecimento desenvolvidas pela razão e uma delas atende aos requisitos. As três formas de conhecimento se dão a partir da estrutura de um juízo. Segundo Kant, um juízo é composto de uma afirmação feita a respeito de um sujeito, dada por seu predicado. A relação entre o sujeito e o predicado pode ser de duas formas:

> Em todos os juízos em que se concebe a relação de um sujeito com um predicado (considerando só os juízos afirmativos, pois nos negativos é mais fácil fazer, depois, a aplicação), esta relação é possível de dois modos: ou o predicado B pertence ao sujeito A como algo nele contido (de um modo tácito), ou B é completamente estranho ao conceito A, se bem se ache enlaçado com ele[26] (KANT, Crítica da Razão Pura, Introdução, ítem IV, A-6).

Os conhecimentos afirmados a partir das relações possíveis entre sujeito e predicado são expressos por Kant logo a seguir:

> No primeiro caso chamo ao juízo analítico, no segundo, sintético. Os juízos analíticos (afirmativos) são, pois, aqueles em que o enlace do sujeito com o predicado se concebe por identidade; aqueles, ao contrário, cujo enlace é sem identidade, devem

[25] Verificar, por exemplo, a Introdução da *Crítica da Razão Pura*, ítens IV a VI. Os predicados do conhecimento científico apresentam universalidade e necessidade, mas ao mesmo tempo são aditados ao sujeito, transcendendo o juízo analítico, mas não acarretando um juízo sintético *a posteriori*.

[26] In allen Urteilen, worinnen das Verhältnis eines Subjekts zum Prädikat gedacht wird, (wenn ich nur die bejahenden erwäge: denn auf die verneinenden ist die Anwendung leicht) ist dieses Verhältnis auf zweierlei Art möglich. Entweder das Prädikat B gehört zum Subjekt A als etwas, was in diesem Begriffe A (versteckterweise) enthalten ist; oder B liegt ganz außer dem Begriff A, ob es zwar mit demselben in Verknüpfung steht (KANT, I. Kritik der Reinen Vernunft, A6).

> chamar-se juízos sintéticos. Poder-se-ia também denominar os primeiros de juízos explicativos, e aos segundos, de juízos extensivos, pelo motivo de que aqueles nada aditam ao sujeito pelo atributo, apenas decompondo o sujeito em conceitos parciais compreendidos e concebidos (ainda que tacitamente) no mesmo, enquanto que, pelo contrário, os últimos acrescentam ao conceito do sujeito um predicado que não era de modo algum pensado naquele e que não se obteria por nenhuma decomposição[27] (Idem).

A passagem acima, já bem conhecida no contexto kantiano, chama atenção para um conjunto de relações e delimitações estabelecidas por Kant. Primeiramente, os juízos analíticos são delimitadores de uma relação de identidade entre predicado e sujeito. Uma vez que os predicados se encontram contidos no sujeito, por sua vez, tais juízos são delineados como *explicativos*, e nada contribuem para a ampliação do conhecimento, pelo fato de seus atributos, dados pelo predicado, nada aditarem ao sujeito. Condição distinta é a dos juízos sintéticos. Estes não possuem uma relação de identidade entre sujeito e predicado, circunstância que determina, em contrapartida, que todo juízo sintético pode ser considerado um juízo extensivo ou ampliativo, pelo fato de que os predicados aditados ao sujeito ampliam a compreensão deste, por não serem encontrados presentes no sujeito por nenhum método de decomposição.

Um ponto importante ressaltado por Coffa é que, para Kant, todos os conceitos são explicados mediante a Análise. Esse ponto é significativo para compreendermos o caminho tomado por Frege em sua crítica. De acordo com Coffa:

> Análise é o processo pelo qual nós identificamos os constituintes de uma representação complexa. É um processo que tem que seguir para um fim, depois (talvez), de passar finitamente muitos estágios, na identificação de simples constituintes. Mais ainda, a

[27] Im ersten Fall nenne ich das Urteil analytisch, im andern synthetisch. Analytische Urteile (die bejahenden) sind also diejenigen, in welchen die Verknüpfung des Prädikats mit dem Subjekt durch Identität, diejenigen aber, in denen diese Verknüpfung ohne Identität gedacht wird, sollen synthetische Urteile heißen. Die ersteren könnte man auch Erläuterungs-, die anderen Erweiterungs-Urteile heißen, weil jene durch das Prädikat nichts zum Begriff des Subjekts hinzutun, sondern diesen nur durch Zergliederung in seine Teilbegriffe zerfällen, die in selbigen schon, (obschon verworren) gedacht waren: dahingegen die letzteren zu dem Begriffe des Subjekts ein Prädikat hinzutun, welches in jenem gar nicht gedacht war, und durch keine Zergliederung desselben hätte können herausgezogen warden (Idem).

> melhor forma de saber o que uma Representação é, é identificar seus constituintes[28]. (COFFA, A. The Semantic Tradition, pg. 10).

Entretanto, como bem se sabe, Kant ainda concebe um terceiro tipo de juízo extraído das relações dadas pelo sujeito e predicado. Trata-se do juízo sintético *a priori*. Esse juízo não ocorre naturalmente, sendo antes o resultado de um aditamento de um predicado *a priori* a um sujeito. Segundo Kant:

> A ciência da natureza (Física) contém como princípios, juízos sintéticos "*a priori*". Só tomarei como exemplos estas duas proposições: em todas as mudanças do mundo corpóreo a quantidade de matéria permanece sempre a mesma, ou, em todas as comunicações de movimento a ação e reação devem ser sempre iguais.
>
> Em ambos vemos, não só a necessidade e, por conseguinte, sua origem "*a priori*", senão que são proposições sintéticas.
>
> Porque no conceito de matéria não penso em sua permanência, mas unicamente em sua presença no espaço que ocupa, e, portanto, vou além do conceito de matéria para atribuir-lhe algo "*a priori*" que não havia concebido nele.
>
> A proposição não é, pois, concebida analítica, senão sinteticamente, ainda que "a *priori*", e assim sucede com as restantes proposições da parte pura da Física[29] (KANT, Crítica da Razão Pura, Introdução, ítem IV, B17-18).

[28] Analysis is the process through which we identify the constituents of a complex representation. It is a process that must come to an end, after (perhaps) finitely many stages, in the identification of simple constituents. Moreover, the best way to know what a representation is, is to identify its constituents (COFFA, A. The Semantic Tradition, pg. 10).

[29] Naturwissenschaft (Physica) enthält synthetische Urteile a priori als Prinzipien in sich. Ich will nur ein paar Sätze zum Beispiel anführen, als den Satz: daß in allen Veränderungen der körperlichen Welt die Quantität der Materie unverändert bleibe, oder daß, in aller Mitteilung der Bewegung, Wirkung und Gegenwirkung jederzeit einander gleich sein müssen. An beiden ist nicht allein die Notwendigkeit, mithin ihr Ursprung a priori, sondern auch, daß sie synthetische I Sätze sind, klar. Denn in dem Begriffe der Materie denke ich mir nicht die Beharrlichkeit, sondern bloß ihre Gegenwart im Raume durch die Erfüllung desselben. Also gehe ich wirklich über den Begriff von der Materie hinaus, um etwas a priori zu ihm hinzuzudenken, was ich in ihm nicht dachte. Der Satz ist also nicht analytisch, sondern synthetisch und dennoch a priori gedacht, und so in den übrigen Sätzen des reinen Teils der Naturwissenschaft. (KANT, I. Kritik der Vernunft, B17-18)

Por essa definição, todo conhecimento no qual o predicado ampliar o conteúdo do sujeito e essa informação não for obtida mediante a experiência (*a posteriori*) será um conhecimento sintético *a priori*, universal e necessário. Assim, para Kant, tanto as operações Aritméticas quanto as geométricas seriam conhecimentos sintéticos *a priori*, pois não está dado, por exemplo, que em 2 + 5 = 7, o resultado está contido nos sujeitos 2 e 5. Fundamental para compreendermos como ocorre a percepção desse conhecimento sintético *a priori*, isento da experiência, mas ainda assim descoberto pela razão, é a *intuição*. Para os conhecimentos sintéticos *a priori*, a intuição substitui a experiência concreta. Mas, para que a intuição possua tão forte influência definidora a ponto de substituir a experiência concreta, precisamos perguntar sobre qual é o fundamento dos conhecimentos sintéticos *a priori* para que a intuição possa ser compreendida.

É para explicar esse ponto que Kant nos apresenta a conhecida *revolução copernicana*, pois Kant, seguindo o exemplo de Copérnico, realiza uma inversão no processo de investigação epistemológica sobre o conhecimento dos objetos. Segundo Kant:

> Até hoje admitia-se que o nosso conhecimento se devia regular pelos objetos; porém, todas as tentativas para descobrir *a priori*, mediante conceitos, algo que ampliasse o nosso conhecimento, malogravam-se com este pressuposto. Tentemos, pois, uma vez, experimentar se não se resolverão melhor as tarefas da metafísica, admitindo que os objetos se deveriam regular pelo nosso conhecimento, o que assim já concorda melhor com o que desejamos, a saber, a possibilidade de um conhecimento *a priori* desses objetos, que estabeleça algo sobre eles antes de nos serem dados. Trata-se aqui de uma semelhança com a primeira ideia de Copérnico; não podendo prosseguir na explicação dos movimentos celestes enquanto admitia que toda a multidão de estrelas se movia em torno do espectador, tentou se não daria melhor resultado fazer antes girar o espectador e deixar os astros imóveis. Ora, na metafísica, pode-se tentar o mesmo, no que diz respeito à intuição dos objetos. Se a intuição tivesse de se guiar pela natureza dos objetos, não vejo como deles se poderia conhecer algo *a priori*; se, pelo contrário, o objeto (enquanto objeto dos sentidos) se guiar pela natureza da nossa faculdade de

intuição, posso perfeitamente representar essa possibilidade[30]. (KANT, Immanuel, Idem, BXVI-XVII)

O argumento de Kant, ao promover a inversão do objeto para o sujeito, consiste em partir do princípio de que o que é *a priori* não é dado pelos objetos, mas sim pelo sujeito. A intuição coloca aquilo a que os objetos serão regulados. É, pois, a partir dessa *intuição pura* kantiana que seus argumentos são construídos na *Crítica da Razão Pura*. O juízo que aparece nas ciências é fundamentado em nossas intuições *a priori*, isto é, aos fundamentos da razão pura que indagam à natureza sobre a conformidade a seus princípios. É importante observarmos que, segundo Coffa, toda essa exposição de Kant foi alvo de uma tradição da filosofia da linguagem no século XIX que, em algum nível, procurou contestá-la.

Para Coffa, a distinção kantiana entre o juízo analítico e sintético será problemática, a começar pela relação com as ideias de juízo clarificatório e juízo ampliativo.[31] Essa relação produzirá um equívoco, que é o de deduzir que conhecimentos analíticos são nominais e lógicos e juízos sintéticos são semânticos. Essa distinção, segundo Coffa, vem da ideia de que conceitos só podem ser tratados e conhecidos em suas relações por meio da análise sendo, pois, clarificatórios ou explicativos. Já os juízos sintéticos, por sua natureza semântica, seriam ampliativos.

---

[30] Bisher nahm man an, alle unsere Erkenntnis müsse sich nach den Gegenständen richten; aber alle Versuche über sie a priori etwas durch Begriffe auszumachen, wodurch unsere Erkenntnis erweitert würde, gingen unter dieser Voraussetzung zunichte. Man versuche es daher einmal, ob wir nicht in den Aufgaben der Metaphysik damit besser fortkommen, daß wir annehmen, die Gegenstände müssen sich nach inserem Erkenntnis richten, welches so schon besser mit der verlangten Möglichkeit einer Erkenntnis derselben a priori zusammenstimmt, die über Gegenstände, ehe sie uns gegeben werden, etwas festsetzen soll. Es ist hiermit ebenso, als mit den ersten Gedanken dês Kopernikus bewandt, der, nachdem es mit der Erklärung der Himmelsbewergungen nicht gut fort wollte, wenn er annahm, das ganze Sternenheer drehe sich um den Zuschauer, versuchte, ob es nicht besser gelingen möchte, wenn er den Zuschauer sich drehen, und dagegen die Sterne in Ruhe ließ. In der Metaphysik kann man | nun, was die Anschauung der Gegenstände betrifft, es auf ähnliche Weise versuchen. Wenn die Anschauung sich nach der Beschaffenheit der Gegenstände richten müßte, so sehe ich nicht ein, wis man a priori Von ihr etwas wissen könne; richtet sich aber der Gegenstand (als Objekt der Sinne) nach der Beschaffenheit unseres Anscauungsvermögens, so kann ich mir diese Möglichkeit ganz wohl vorstellen. (Idem, BXVI-XVII).

[31] Coffa, 2003, páginas 16 em diante.

Por meio da Análise, os conceitos poderiam ser compreendidos em termos de identidade e contradição, próprios do campo de definições. Mas o mesmo não poderia ser dito do princípio por trás do juízo sintético, uma vez que esse se funda no significado. Assim, com a abordagem kantiana definida, duas trilhas passam a ser concebidas para os juízos analíticos e sintéticos. Sobre o conhecimento analítico, esse passa a ser enquadrado na metáfora conhecida como *Chemical Theory of Representation*, a teoria central da representação da qual Kant fez parte, pela qual se definia o conceito pela metáfora de compostos químicos, estes compostos por partes complexas e que, muitas vezes, também possuíam partes complexas. Por essa definição, somente a Análise poderia desvendar essas partes constitutivas.

Em contrapartida, para o conhecimento sintético, surge uma complexidade referida por Coffa:

> Kant explicou que todos os juízos analíticos se baseiam em um único princípio, o que ele às vezes chama de "princípio dos juízos analíticos", o princípio de identidade ou contradição. O que ele tinha em mente, presumivelmente, era um princípio que permitia predicar de um dado conceito aqueles outros conceitos que "pensamos" em seus constituintes. Seja como for que isso funcione, o ponto interessante é que Kant assumiu que sua distinção analítico-sintética caracterizava, por assim dizer, tipos naturais epistêmicos, de modo que se sentia justificado em concluir que deveria haver outro princípio envolvido na fundamentação de todos os juízos sintéticos. Ele chamou, é claro, o "princípio mais alto de todos os juízos sintéticos" [32](COFFA, pg. 17)

Esse princípio mais alto de todos os juízos sintéticos ganha esse nome devido ao fato de que, na concepção kantiana, se os juízos analíticos promovem uma análise conceitual por meio de uma analiticidade nominal, na qual os conceitos são deduzidos

[32] Kant had explained that all analytic judgements are grounded on a single principle, what he sometimes called the “principle of analytic judgements” (e.g., Critique, A149-50/B189), the principle of identity or contradiction. What he had in mind, presumably, was a principle allowing one to predicate of a given concept those other concepts that we “think” in it as constituents. However this may work, the interesting points is that Kant assumed that his analytic-synthetic distinction characterized, as it were, epistemic natural kinds, so he felt justified in concluding that there had to be another principle involved in the grounding of all synthetic judgements. He called it, of course, the “highest principle of all synthetic judgements” (Idem, pg. 17)

como pertencentes a outros, no juízo sintético, tal pertencimento não pode ser deduzido, a menos que um terceiro elemento promova a mediação entre eles. Essa mediação, segundo Coffa, só pode ser promovida pela intuição:

> Como Kant não reconheceu nenhum bloco semântico além de conceitos e intuições, seguiu-se que o fundamento de todo conhecimento sintético, a cola que liga os conceitos em um julgamento sintético, deve sempre envolver a intuição. Este é o conteúdo do princípio dos juízos sintéticos: os juízos sintéticos "só são possíveis sob a condição de que uma intuição fundamente o conceito de seu sujeito"[33]. (COFFA, idem)

A exposição acima da concepção kantiana não escapa aos olhos de Frege. E essa crítica, sob a qual ele alicerçará o logicismo, será focada em três pontos. Primeiro, em relação à natureza dos juízos analítico e sintético; segundo, no que diz respeito ao mecanicismo da nominalidade dos juízos analíticos; e o terceiro ponto, acerca do papel da intuição como mediador de conceitos.

1.3 A Enumerabilidade do Pensável

Para Frege, a distinção entre analítico e sintético e *a priori* e *posteriori* caracteriza os tipos de escolhas que podemos fazer para classificar o sistema de operações numéricas e toda a Aritmética. De acordo com Mark Textor (2011), Kant definiu que tanto a Aritmética quanto a Geometria seriam ciências cujos juízos são classificados como sintéticos *a priori*. Nesse sentido, o autor afirma: “Enquanto a distinção sintética / analítica diz respeito a como os diferentes conceitos estão relacionados no juízo, a distinção *a priori* / *a posteriori* diz respeito ao tipo de justificativa que se tem para o julgamento.”[34] (Textor, M. Frege On Sense and Reference, pg.09). Essa definição

[33] Since Kant recognized no semantic building blocks other than concepts and intuitions, it followed that the ground of all synthetic knowledge, the glue that links the concepts in a synthetic judgement, must always involve intuition. This is the content of the principle of synthetic judgements: Synthetic judgements “are only possible under the condition that an intuition underlies the concept of their subject” (Idem).

[34] Where this analytic/synthetic distinction is concerned with a relation between concepts that bears on the justification of judgements, the a priori/a posteriori distinction is directly concerned with the justification of judgements (Textor, M. Frege On Sense and Reference, pg.09).

implica que juízos analíticos ou sintéticos se referem ao modo como os conceitos se relacionam no interior de um julgamento, de maneira que um juízo analítico é aquele no qual um conceito-sujeito contém um conceito-predicado. Como já mencionamos, esse tipo de juízo (*juízo de explicação conceitual)* em última instância explica ou analisa o conceito-sujeito. Por outro lado, um juízo sintético, também chamado de *juízo ampliativo*, amplifica o conceito-sujeito, na medida em que acrescenta conteúdo junto ao conceito-predicado.

Quando falamos de *a priori* / *a posteriori*, no entanto, estamos nos referindo a algo distinto da relação entre os conceitos, pois estamos considerando a justificativa que se tem para que aquele juízo seja realizado. Para Kant, um juízo *a priori* significa que ele se justifica independente da experiência, enquanto que um juízo *a posteriori* só pode ser justificado na experiência. O sentido de "independência" usado por Kant possui relevância para compreendermos a aplicação de independência do ser verdadeiro em relação ao empirismo, feita por Frege. Para saber que uma árvore é igual a si mesma, é necessário ter visto uma árvore para saber do que se fala, mas compreender que a árvore ou qualquer outra coisa é igual a si mesma dispensa a necessidade da experiência. Esse juízo é justificado independente de experiências pessoais.

Como já vimos anteriormente, Kant define que a Aritmética, bem como a Geometria, possui juízos que são sintéticos *a priori*. Conforme Textor:

> Um juízo que é sintético *a priori* não será justificado pelo exercício de uma habilidade para definir um conceito, mas será justificado independentemente da experiência. A discussão de Kant é alimentada pela pergunta sobre o que esta justificação pode ser. Por exemplo, ele *(Kant)* argumentou que a definição dos conceitos de 7, 5 e mais não é suficiente para justificar o meu julgamento que 7 + 5 = 12 (Kant 1781/8: B 15-16)[35] (TEXTOR, M. Idem)[36].

[35] A judgement that is synthetic a priori will not be justified by the exercise of an ability to define a concept, but it will be justified independently of experience. Kant's discussion is fuelled by the question what this justification might be. For example, he argued that defining the concepts of 7, 5 and plus doesn't suffice to justify my judgement that 7 + 5 = 12 (Kant 1781/8: B 15–16) (Idem).

[36] A citação de Textor, ao final da passagem, remete à *Crítica da Razão Pura*, passagens B15 – 16.

A simples definição dos conceitos não é o suficiente para a realização das operações Aritméticas. O conhecimento matemático necessita recorrer à intuição, significando que o conhecimento é aprendido a partir de intuições *a priori:*

> A Filosofia mantém-se simplesmente em conceitos gerais; a Matemática nada pode fazer como mero conceito, mas apressa-se a recorrer à intuição, na qual considera *in concreto* o conceito, embora não de modo empírico, mas simplesmente numa intuição que apresentou *a priori*, isto é, construiu, e na qual tudo aquilo que resulta das condições gerais da construção deve ser válido também de uma maneira geral para o objeto do conceito construído[37]. (KANT, I. *Crítica da Razão Pura*, A715 – B744).

É precisamente esse o ponto de discordância de Frege em relação à Kant. Ainda de acordo com Textor:

> Frege afirma, contra Kant, que na Aritmética nós não precisamos ter intuições, representações de coisas particulares no espaço e no tempo, para justificar nossos juízos. Nossa habilidade para definir conceitos gerais e para traçar inferências é nossa fonte do conhecimento aritmético[38]. (TEXTOR, M. ibidem, pg.10).

Vimos que a opção de Kant, de que o conhecimento aritmético seja sintético *a priori*, acarreta a necessidade de recorrer a uma suposta intuição espaço-temporal que, em certa medida, se aproxima perigosamente de uma visão empírica da Aritmética. Convém, a partir desse ponto, estender um pouco mais na compreensão da crítica de Frege à intuição, dado que inúmeras consequências se seguirão dessa recusa.

O primeiro apontamento de Frege contra o caráter sintético *a priori* da Aritmética se dá no § 12 dos *Fundamentos*, onde ele indaga se deveríamos optar pelo caráter sintético *a priori* ou analítico:

---

[37] Jene hält sich bloß an allgemeinen Begriffen, diese kann mit dem bloßen Begriffe nichts ausrichten, sondern eilt sogleich zur Anschauung, in welcher sie den Begriff in concreto betrachtet, aber doch nicht empirisch, sondern bloß in einer || solchen, die sie a priori darstellt, d. i. konstruiert hat, und in welcher dasjenige, was aus den allgemeinen Bedingungen der Konstruktion folgt, auch von dem Objekte des konstruierten Begriffs allgemein gelten muß. (Idem, A715-B744).

[38] Frege claims, against Kant, that in arithmetic we don’t need to have intuitions, representations of particular things in space and time, to justify our judgements. Our ability to define general concepts and to draw inferences is our source of arithmetical knowledge (Ibidem, pg. 10).

> Kant decidiu-se em favor da primeira. Neste caso, não há praticamente outra alternativa senão apelar para uma intuição pura como fundamento último de conhecimento, embora aqui seja difícil dizer se ela é espacial ou temporal, ou de qualquer outra espécie[39]. (FREGE, G. *Fundamentos da Aritmética*, §12)

O obstáculo imediato que se coloca para Frege encontra-se no fato da ausência de clareza sobre a que exatamente nos referimos ao utilizarmos a expressão "intuição" como o recurso sobre o qual podemos fundamentar um determinado tipo de conhecimento. O sentido do termo ele procura no próprio Kant, em sua definição extraída da *Lógica Transcendental*. Pela definição kantiana, a intuição seria uma representação singular, que se colocaria em contraponto ao conceito, uma representação geral ou refletida.

A observação de Frege, enunciada a seguir, reflete a necessidade que surge da definição de representação singular. Essa representação carregaria algo de arbitrário? O que tornaria essa representação *singular*? E qual seria a instância de validação dessa representação para a intuição? Segue-se a observação de Frege:

> Não se faz absolutamente menção à relação com a sensibilidade, que é, contudo, introduzida na Estética Transcendental, e sem a qual a intuição não pode servir de princípio de conhecimento para os juízos sintéticos *a priori*[40]. (FREGE, G. *Fundamentos da Aritmética*, §12).

De fato, de acordo com Kant, apenas a sensibilidade nos fornece intuições, pois é por meio dela que nos são dados os objetos. Porém, a sensibilidade, no sentido que Frege concebe a Kant, não pode atribuir-se aos números. Em linhas gerais, a sensibilidade apreende objetos e gera intuições a partir de um processo de construção. Daí poder-se

[39] Für die erstere entscheidet sich Kant . In diesem Falle bleibt wohl nichts übrig, als eine reine Anschauung als letzten Erkenntnissgrund anzurufen, obwohl hier schwer zu sagen ist, ob es eine räumliche oder zeitliche ist, oder welche es sonst sein mag. (FREGE, G. Der Grundlagen der Arithmetik, §12).

[40] Hier kommt die Beziehung zur Sinnlichkeit gar nicht zum Ausdrucke, die doch in der transcendentalen Aesthetik hinzugedacht wird, und ohne welche die Anschauung nicht als Erkenntnissprincip für die synthetischen Urtheile apriori dienen kann (FREGE, G. Die Grundlagen der Arithmetik, §12).

conceber as leis geométricas por esse caminho da intuição. Segundo Frege, as verdades geométricas governam o campo do intuível espacialmente. Porém, a particularidade dos números não pode ser apreendida dessa forma. No limite, se assim o fosse, o conceito de número seria tão indemonstrável como se estivéssemos falando de verdades de fato. Por esse motivo, a rejeição da fundamentação da Aritmética nas verdades sintéticas *a priori* é derivativa de sua recusa da intuição, o que o leva a expressar:

> O sentido de nossa palavra é assim mais amplo na Lógica que na Estética Transcendental. No sentido lógico poder-se-ia talvez chamar 100.000 de intuição; pois conceito geral não é. Mas tomada nesse sentido a intuição não pode servir de fundamento para as leis da Aritmética[41].(idem, §12).

Esse ponto indicado por Frege sobre duas possíveis interpretações diferentes a respeito da concepção da intuição kantiana não deixaria de ser um ponto de discussão a respeito da espacialidade e temporalidade a ela atribuída. De acordo com Posy (1992) acarretaria um importante debate a respeito da matemática kantiana subsumida em sua *Crítica da Razão Pura*. A conexão entre intuição e espacialidade, para Kant, parecem estar relacionadas às dificuldades com relação à infinitude espacial. De acordo com Posy, dois critérios são apresentados por Kant para justificar o recurso à intuição para a concatenação dos juízos na matemática: o primeiro deles é a singularidade do espaço e de todas as representações de objetos que ocorre nele. O segundo é a imediaticidade da intuição. De acordo com Posy:

> Estas características duplas, singularidade e imediaticidade, são reforçadas ainda mais no A320/B376-77, e elas formam a base da visão de Parsons em "Kant’s Philosophy of Aritmethic". Enquanto a imediaticidade implica singularidade, o inverso, diz Parsons, não precisa se manter. Há conceitos singulares, cuja relação com seus objetos é presumivelmente mediada pelos conceitos mais gerais

[41] Der Sinn unseres Wortes in der Logik ist demnach ein weiterer als in der trancendentalen Aesthetik. Im logischen Sinne könnte man vielleicht 1000000 eine Anschauung nennen; denn ein allgemeiner Begriff ist es nicht. Aber in diesem Sinne genommen, kann die Anschauung nicht zur Begründung der arithmetischen Gesetze dienen (Idem).

> dos quais eles são compostos (POSY, Carl J. Kant´s Philosophy of Mathematics, pg. 03)[42].

A passagem que deu origem ao mencionado debate antecede a *Segunda Seção* da *Crítica da Razão Pura*, denominada *Das Ideias Transcendentais*. De acordo com a referida passagem:

> O conhecimento, por sua vez, é intuição ou conceito (intuitus vel conceptus). A primeira refere-se imediatamente ao objeto e é singular, o segundo refere-se mediatamente, por meio de um sinal que pode ser comum a várias coisas. O conceito é empírico ou puro e ao conceito puro, na medida em que tem origem no simples entendimento (não numa imagem pura da sensibilidade), chama-se noção (notio). Um conceito extraído de noções e que transcende a possibilidade da experiência é a ideia ou conceito da Razão[43]. (KANT, I. Crítica da Razão Pura, B377).

A segunda seção da *Crítica da Razão Pura* assume particular relevância a respeito de três pontos que circundam a ideia de *intuição.* Esses três pontos podem ser descritos como:

- A noção de Kant de intuição e seu papel epistemológico;
- A exposição do espaço como uma forma de intuição *a priori*;

[42] These dual characteristics, singularity and immediacy, are further reinforced at A320!B376-77, and they form the basis of Parsons' view in "Kant's Philosophy of Arithmetic." Thongh immediacy entails singularity, the reverse, says Parsons, need not hold. There are singular concepts, whose relation to their objects is presumably mediated by the more general concepts of which they are composed. (POSY, Carl J. Kant´s Philosophy of Mathematics, pg. 03).

[43] Diese ist entlweder Anschauung oder Begriff (intuitus vel conceptus). Jene bezieht sich unmittelbar auf den Gegenstand und ist einzeln; dieser mittelbar, vermittelst eines Merkmals, was mehreren Dingen gemein sein kann. Der Begriff ist entweder ein empirischer oder reiner Begriff, und der reine Begriff, sofern er lediglich im Verstande seinen Ursprung hat (nicht im reinen Bilde der Sinnlichkeit) heißt Notio. Ein Begriff aus Notionen, der die Möglichkeit der Erfahrung übersteigt, ist die Idee, oder der Vernunftbegriff. (KANT, I. Kritik der Vernunft, B377).

- A afirmação de Kant de que tempo e espaço são transcendentalmente ideais e empiricamente reais.

A singularidade que Kant reclama como critério para a intuição não aparece apenas na passagem para as ideias transcendentais, mas já havia sido indicada por Kant na passagem A25/B39, por exemplo, enquanto que a imediaticidade já surge nos primeiros parágrafos da Estética Transcendental. A questão, colocada por Hintikka (1992) é no que consiste a relação entre singularidade e imediaticidade. Ambas surgem independentemente uma da outra, sendo elementos contíguos ou, ao contrário, uma é consequência da outra? Para Hinttika, a imediaticidade aparece como uma consequência da singularidade. Hanna (2004) em contrapartida, em sua abordagem semântica cognitiva de Kant, afirma que os objetos das representações, em sua disposição espacial, possuem duas características distintas: por um lado, são objetos intencionais e, em segundo lugar, eles são apresentados mediante representações que "estão em nós", no sentido de uma caracterização mental subjetiva. Hanna ainda aponta mais duas características. A representação subjetiva que temos dos objetos intencionais sempre são formadas em um modo psicológico ou outro, que Kant denomina elemento formal da representação. E, por fim, toda representação possui um conteúdo, que é o que define sua singularidade enquanto representação. Esse conteúdo é, de acordo com Hanna, de dois tipos: "material" ou conteúdo sensorial intuicional, e "intenção", ou conteúdo conceitual. Esse conteúdo conceitual que define a singularidade das representações possui especial relevância para Posy. De acordo com ele, é precisamente devido à concepção de que os objetos que compõem a extensão de conceitos singulares se relacionarem entre si mediante outros conceitos gerais e que, de certa forma, podem ter, eles próprios, outras cadeias de extensões, que introduz a infinitude no núcleo da concepção kantiana de conceitos singulares o que, por sua vez, faz com que Kant considere que a natureza do espaço não pode ser conceitual, mas intuitiva. Segundo Posy:

> O primeiro destes parágrafos argumenta, como vimos, que a representação do espaço é necessariamente singular. A representação do espaço, diz Kant, abrange as regiões espaciais

> individuais como partes e não como elementos subsidiários que se enquadram em um conceito mais geral. O segundo parágrafo tenta provar a intuitividade do espaço, apontando para sua extensão infinita e alegando que nenhum conceito poderia por si só estabelecer a infinidade de espaço (Idem, pg. 06).[44]

De acordo com Melnick (1992) Kant não considera que a concepção de infinitude espacial seja um derivado da infinitude de extensões de conceitos, pelo fato de que os conceitos não implicam a concepção da infinitude de objetos que eles contêm. Por essa abordagem, parece-nos que não haveria a concepção implícita nos conceitos acerca de sua própria infinitude, ou um conceito superordenante que compreendesse a infinitude em sua totalidade, e que fosse intrínseco ao conceito, de onde poderíamos derivar a concepção de infinitude do espaço. Posy complementa:

> Kant aponta que, embora um conceito possa ter infinitamente muitas coisas que "caem sob ele" (ou seja, uma extensão infinita), nenhum conceito pode compreender infinitamente muitas coisas "dentro dele" (idem, pg. 7).[45]

A intuição aparece, portanto, como um recurso extrínseco à infinitude, o que leva Kant a conceber não apenas o espaço como intuição, mas também a condicionar toda a matemática à intuição. Um ponto importante a respeito dessa abordagem é que, para Frege, pelo fato da intuição depender da sensibilidade para que possa perceber quaisquer objetos denota um problema que o faz rejeitar a condição de que a aritmética dependa de fatores intuitivos. As consequências disso é que Frege precisará demonstrar que todos os enunciados aritméticos são analíticos, o que o coloca em

[44] The first of these paragraphs argues, as we have seen, that the representation of space is necessarily singular. The representation of space, says Kant, encompasses individual spatial regions as parts and not as subsidiary elements which fall under a more general concept. The second paragraph attempts to prove the intuitivity of space by pointing to its infinite extent and claiming that no concept could by itself establish the infinity of space. (Idem, pg. 06)

[45] Kant points out that though a concept can have infinitely many things which "fall under" it (i.e., an infinite extension), no concept can comprehend infinitely many things "within it." (Idem, pg. 7)

alinhamento com a proposta leibniziana de que todos enunciados verdadeiros são, no limite, analíticos.[46]

Um contraponto à ideia de que a sensibilidade é intrínseca à intuição é apresentada por Hintikka (1992) e Melnick (1992). O debate empreendido entre os dois autores a respeito da abordagem kantiana da matemática levanta uma concepção dupla a respeito da intuição. Segundo os autores, haveria duas concepções a respeito da intuição na *Crítica da Razão Pura*. A primeira, conforme já indicado anteriormente, diz respeito ao apelo à sensibilidade inerente à intuição espacial. Já na segunda concepção, a intuição, para Kant, seria apenas aquilo que é individual, ou seja, tudo o que não corresponde a conceitos gerais. De acordo com Hintikka:

> De acordo com sua definição, apresentado no primeiro parágrafo de suas palestras sobre lógica, cada ideia particular como distinguida de conceitos gerais é uma intuição. Tudo, em outras palavras, que na mente humana representa um indivíduo é uma intuição. Não há, podemos dizer, nada de "intuitivo" sobre as intuições assim definidas. Intuitividade significa simplesmente individualidade (HINTIKKA, J. apud POSY, idem, pg. 23)[47].

Por essa definição, a intuição não depende da sensibilidade para permitir a apreensão de quaisquer objetos, conforme é enunciado na *Estética Transcendental* que, como já abordamos, foi o ponto de referência utilizado por Frege nos *Fundamentos da Aritmética*. O fato de que existe, em Kant, a possibilidade das intuições serem empregadas de uma forma que Hintikka descreve como "não intuitiva", mas lógica, justificaria a mesma de ser utilizada na aritmética sem descaracterizar o aspecto analítico da mesma. Ou, ainda mais, possibilitaria, talvez, a formação de juízos sintéticos a *priori* sem que elementos psicológicos ou empíricos fossem aditados no processo de conexão de predicados a sujeitos. Implica também dizer que a

[46] Vide argumentação apresentada na página 22.

[47] According to his definition, presented in the first paragraph of his lectures on logic, every particular idea as distingnished from general concepts is an intuition. Everything, in other words, which in the human mind represents an individual is an intuition. There is, we may say, nothing 'intuitive' about intuitions so defined. Intuitivity means simply individuality. (HINTIKKA, J. Apud POSY, idem, pg. 23)

sensibilidade não é considerada como consequência lógica da definição de intuição, mas um elemento que pode estar aditado a ela. Isso faz com que, conforme Hintikka: ´A conexão entre sensibilidade e intuição foi para Kant algo a ser provado, não algo a ser assumido´. (Idem)[48]

A despeito disso, Hinttika ressalta dois pontos importantes em sua tese, que visam evitar que a dissociação entre intuição e sensibilidade implique uma espécie de *intuição intelectual*. O primeiro diz respeito à ideia de "construir um conceito". O termo "construção" empregado por Kant implicaria, de acordo com Hinttika, um elemento independente da sensibilidade na construção do conceito, o que resulta na intuição atuar como uma individuação do conceito. Nesse sentido, afirma Hinttika:

> Voltando à caracterização de Kant: o primeiro termo importante que ele contém é a palavra "construção". Este termo é explicado por Kant dizendo que construir um conceito é o mesmo que exibir, *a priori*, uma intuição que representa o conceito, desde que isso seja feito sem o recurso à experiência[49] (HINTIKKA, J. Kant on the Mathematical Method, *in* Kant's Philosophy of Mathematics, pg. 21).

A conexão entre sensibilidade e intuição não deixaria de ser uma possibilidade, ou um caso específico a respeito da intuição, mas não uma regra ou conexão lógica necessária. Ela ocorreria, de acordo com Hinttika, apenas com o caso dos humanos, e apenas no que tange à estética transcendental[50]. Essa abordagem permite dizer que,

---

[48] The connection between sensibility and intuition was for Kant something to be proved, not something to be assumed (Idem).

[49] To come back to Kant's characterization: the first important term it contains is the word 'construction'. This term is explained by Kant by saying that to *construct* a concept is the same as to exhibit, a priori, as *intuition* which corresponds to the concept. Construction, in other words, is tantamount to the transition from a general concept to an intuition which represents the concept, provided that this is done without recourse to experience. (HINTIKKA, J. Kant on the Mathematical Method, *in* Kant's Philosophy of Mathematics, pg. 21)

[50] Hinttika afirma, a esse respeito: "(...)Tenhamos em mente que essa conexão entre intuições e sensibilidade nunca foi tomada por Kant como uma mera consequência lógica da definição de intuição. Pelo contrário, Kan insiste durante toda a Crítica da Razão Pura que não é incompreensível que outros seres possam ter intuições por outros meios que não os sentidos (...) As provas que ele deu para assumir a conexão (no caso dos seres humanos) são apresentadas na Estética Transcendental".

Do original: (...) have to keep in mind that this connection between intuitions and sensibility was never taken by Kant as a mere logical consequence of the definition of intuition. On the contrary, Kant insists all na Doutrina do Método, por exemplo, ao tratar do método matemático, Kant não se valeria dessa conexão entre sensibilidade e intuição.[51]

Entretanto, essa abordagem "não-intuitiva" a respeito da noção de intuição, não seria, de acordo com Hintikka, tão distante ou incompatível com a concepção clássica de intuição, e estabelece a proximidade entre ambas:

> É útil observar neste ponto que a leitura de Kant que eu sugiro não é inteiramente incompatível com a outra interpretação, mais tradicional. Por um lado, uma imagem mental totalmente concreta representa um particular e, portanto, uma intuição no sentido da definição mais ampla. Por outro lado, casos particulares de conceitos gerais são comumente muito mais fáceis de lidar do que os próprios conceitos gerais; eles são muito mais intuitivos no sentido comum da palavra do que conceitos gerais. As duas interpretações, portanto, não discordam tão amplamente quanto parece a princípio (Idem, pg. 25)[52].

A hipótese de Hintikka mostra-se interessante para a discussão que apresentamos até o momento. Se tomarmos como válida a abordagem na qual Kant concebe a intuição como representação de individuais, isso posicionaria sua análise matemática em um eixo de discussão mais próximo de Leibniz e do próprio Frege, incluindo os mesmos problemas que cada um busca resolver.

O primeiro ponto que chama a atenção é que isso justifica a concepção kantiana de construção ou composição de proposições mediante as relações internas construídas

---

through the Critique of Pure Reason that it is not incomprehensible that other beings might have intuitions by means other than senses (...) The proofs he gave fr assuming the connection (in the case of human beings) are presented in the Transcendental Aesthetic (Idem, pg. 23).

[51] Hintikka defende a ideia de que na Doutrina do Método, o método matemático assume a conexão entre intuitividade e individualidade que se distingue do conceito geral e que, embora na organização da Crítica, ela seja posterior à Estética Transcendental, essa ideia a respeito da intuição seria anterior à concepção da intuição como representação conectada com a sensibilidade. Vide página 24 em diante do referido artigo.

[52] It is useful to observe at this point that the reading of Kant which I am suggesting is not entirely incompatible with the other, more traditional, interpretation. On one hand, a fully concrete mental picture represents a particular, and therefore an intuition in the sense of the wider definition. On the other hand, particular instances of general concepts are usually much easier to deal with than general concepts themselves; they are much more intuitive in the ordinary sense of the word than general concepts. The two interpretations therefore don't disagree as widely as may first seem (Idem, pg. 25).

entre seus elementos (individuais), que são representados pela intuição. Em contrapartida, o problema da existência desses elementos passa a fazer parte da problemática kantiana, que precisa justificar a existência dos individuais fora do campo conceitual. E, por fim, apresenta-se, como já aludimos anteriormente, ao fato de que, como esses individuais se estendem ao infinito em número, faz-se necessário compreender como se torna possível que eles sejam conhecidos. Esse problema havia sido contextualizado anteriormente quando mencionamos o sistema leibniziano, e vimos que a solução deste foi reunir todos os infinitos elementos constitutivos da realidade na extrínseca mente de deus. Na versão kantiana do problema, Hintikka tece uma crítica à solução dada por Kant. Para Kant, todos os individuais são reunidos e tornados conhecidos em sua existência pela percepção. De acordo com Hintikka (1992):

> Simplesmente não é verdade que nós eventualmente ou sempre viemos a conhecer a existência de indivíduos no mundo por meio da percepção, no sentido de que a percepção é o todo do processo envolvido. Pode até ser perguntado se alguma percepção precisa estar envolvida. Quando nós viemos a estabelecer a existência de um número de um determinado tipo, é um erro supor que a percepção está sempre envolvida. (HINTIKKA, idem, pg. 39)[53]

Ainda que assumamos a posição de Hintikka e recusemos a hipótese da percepção ser envolvida como a totalidade do processo de representações de individuais como existentes, no limite, ainda poderíamos supor que a infinitude de individuais existentes seria reunida no Sujeito Transcendental. Nesse sentido, tanto o Sujeito Transcendental quanto a *percepção* seriam elementos tão extrínsecos quanto a mente divina leibniziana.

Essa abordagem explicaria porque Frege recusa o modelo de construção em blocos kantiano, recusando que a junção das partes torne previsível a totalidade de um enunciado. Também explica a negativa de Frege em aceitar um campo extrínseco que

[53] It is simply not true that we usually or always come to know the existence of individuals in the world by means of perception in the sense that perception is the whole of the process involved. It may even be asked whether any perception at all need be involved. When we come to establish the existence of a number of a certain kind, it is mistaken to assume that perception is always involved. (HINTIKKA,idem, pg. 39)

reúna todos os individuais em um modelo de infinitude atual, principalmente se esse campo for o da percepção (se adotarmos a discussão moderna a respeito da matemática kantiana), uma vez que o campo da percepção depende da sensibilidade para o conhecimento. Vemos que, ainda que Frege não tenha diretamente adotado a hipótese de Hintikka, a recusa por essa via acaba se encontrando com o problema da intuição pura e da sensibilidade. A abordagem de Frege, de uma forma ou de outra, procurará desenvolver o logicismo como a forma pela qual um campo intrínseco à lógica seja o fundamento da infinitude do pensamento e da aritmética.

Por fim, ainda outro ponto do debate parece servir de justificativa para a reiteração de Kant de que, contra a concepção leibniziana, a aritmética seria fundamentada em juízos sintéticos e na intuição pura. Leibniz já apontava a origem analítica, mediante demonstração, dos números 2, 3 e 4. Sabemos que Frege, de fato, buscará seguir a linha argumentada por Leibniz para definir a natureza analítica e não intuitiva da aritmética. Uma hipótese levantada por Parsons (1992) é a de que é possível que, para Kant, já era patente que a definição de Leibniz para os números não seria, de todo, analítica, mas alicerçada na comutatividade e associatividade. Essa possibilidade repousa na evidência de que, para Schultz, bem como para outros alunos de Kant, já havia menção de que as identidades dos números definidas por Leibniz de forma axiomática ocultavam tanto a associatividade quanto a comutatividade em sua composição. De acordo com Parsons:

> Colocando grande peso sobre a evidência de escritos de Schultz e outros discípulos de Kant, Gottfried Martin levou adiante a hipótese de que Kant previra uma fundação axiomática de aritmética semelhante às axiomatizações clássicas da geometria. Ele vê a afirmação que a aritmética é sintética como apoiada em primeira instância no ponto lógico de que proposições aritméticas, como ' 7 + 5 = 12 ' não podem ser provadas por mera lógica de definições tais como os empregados por Leibniz. Uma base axiomática do tipo que responderia às ideias de Martin é dada no *Prufung* de Schultz. Sem mencionar explicitamente Leibniz, Schultz aponta que o tipo de prova de uma identidade aritmética que Leibniz dá repousa sobre a suposição de associatividade. Ele dá, para '7 + 5 = 12', um argumento que também se apoia sobre a comutatividade, e parece, erroneamente, pensar esta suposição como inevitável.

> Mas é claro que comutatividade teria que ser usada mais cedo ou mais tarde em aritmética (PARSONS, C. Idem, pg. 52).[54]

Não obstante a isso, Parsons enfatiza que, ainda que assim o seja, isso não acarreta que associatividade e comutatividade sejam intuitivas e sintéticas, mas que também poderiam ser analíticas, e que Leibniz havia argumentado a respeito disso, pelo menos em relação à lei da comutatividade.

Entretanto, embora Frege concorde com a abordagem de Leibniz em considerar o fundamento aritmético e a definição de número como analítica, existem pontos de discordância entre ambos. A crítica de Frege a Leibniz, nesse aspecto, converge com a crítica ao empirismo que ele já havia iniciado, em relação à concepção mecânica de agregação como forma de fundamentação dos números. Se, em relação à Mill, Frege imputava o equívoco de conceber os números como abstrações de objetos concretos resultantes de nossa experiência, como o emprego de pedrinhas para, por indução, derivar toda a aritmética, Frege encontrará uma derivação incutida primeiramente em Leibniz e posteriormente em Kant. No caso de Kant, como já observamos, as dificuldades seguem pela necessidade de a intuição estar presente na representação de todos os existentes, o que, seja pela concepção tradicional da *Crítica da Razão Pura*, seja pelas abordagens modernas de Hintikka, Parsons e outros, resultará no mesmo problema de uma construção e agregação mecânica que remete uma composição subjetiva de objetos singulares paralela, porém em outro nível, ao do empirismo. A crítica a Leibniz, no entanto, diz respeito à concepção de número. Frege já havia feito notar que a definição de Leibniz dos números ocultava a associatividade, assim como

[54] Putting great weight on the evidence of writings by Schultz and other disciples of Kant, Gottfried Martin has put forth the hypothesis that Kant envisaged an axiomatic foundation of arithmetic similar to the classical axiomatizations of geometry.9 He sees the claim that arithmetic is synthetic as resting on the first instance on the logical point that arithmetical propositions such as '7 + 5 = 12' cannot be proved by mere logic from definitions such as those Leibniz uses. An axiomatic foundation of the sort which would answer to Matrtin's ideas is given in Schultz's Prufung. Without explicitly mentioning Leibniz, Schultz points out that the sort of proof of an arithmetical identity that Leibniz gives rests on the assumption of associativity. He gives, for '7 + 5 = 12', an argument which also rests on commutativity, and seems, wrongly, to think this assumption unavoidable. But of course commu- tativity has to be used sooner or later in arithmetic (PARSONS, idem, pg. 52).

Schultz e, possivelmente, Kant. Essa associatividade, no entanto, Frege a entende como problemática não porque ela seja em si mesma sintética, como pressupunha Schultz, mas sim porque Leibniz entendia o número *um* como *unidade* ou, em outras, palavras, como representação das coisas. De acordo com Frege:

> Cabe observar aqui a relação que mantêm entre si os significados das palavras "unidade" e "um". Leibniz entende por unidade um conceito sob o qual caem o 1 e o 1 e o 1, ou como diz também: "O abstrato de um é a unidade". Locke e Hesse parecem empregar unidade e um com o mesmo significado. Basicamente, é o que faz também Leibniz; pois, chamando de um todos os objetos singulares que caem sob o conceito de unidade, designa com aquela palavra não o objeto singular, mas o conceito sob o qual todos caem[55] (FREGE, G. *Fundamentos da Aritmética*, § 37).

Leibniz não entende o número *um* como o objeto "um", mas como a representação numérica de cada objeto singular, de modo que cada objeto é um "um" diferente de outro. Dessa forma, os demais números seriam apenas derivações de representações dessas unidades. E, portanto, o número seria, de uma forma indireta, um conceito equivalente ao de unidade. Essa concepção leibniziana se coaduna com sua ideia de mônada, de elementos singulares que se encontram reunidos na mente divina. O problema, tal como Frege o entende, torna-se muito bem expresso, como se segue:

> Se pretendemos fazer o número surgir da reunião de diferentes objetos, obtemos um aglomerado em que estão contidos os objetos com as mesmas propriedades pelas quais se diferenciam, e isto não é o número. Se por outro lado pretendemos formar o número pela reunião de iguais, eles confluem sempre em um único, e nunca chegamos a uma pluralidade.
> Se designamos por 1 cada um dos objetos a enumerar erramos, visto que coisas diferentes recebem o mesmo sinal. Se provemos o

[55] Hier ist auf die Beziehung zu achten, in der die Bedeutungen der Wörter „Einheit" und „Eins" zu einander stehen. Leibniz versteht unter Einheit einen Begriff, unter den die Eins und die Eins und die Eins fallen, wie er denn auch sagt: „Das Abstracte von Eins ist die Einheit." Locke und Hesse scheinen Einheit und Eins gleichbedeutend zu gebrauchen. Im Grunde thut dies wohl auch Leibniz ; denn indem er die einzelnen Gegenstände, die unter den Begriff der Einheit fallen, sämmtlich Eins nennt, bezeichnet er mit diesem Worte nicht den einzelnen Gegenstand, sondern den Begriff, unter den sie fallen (FREGE, G. Die Grundlagen der Arithmetik, §37).

> 1 de traços distintivos, torna-se inutilizável pela aritmética [56] (FREGE, G. Os *Fundamentos da Aritmética*,§ 39).

A situação que se apresenta para Frege fundamentar o logicismo esbarra, portanto, na seguinte dificuldade: por um lado, Frege precisa demonstrar que a Aritmética se fundamenta em juízos analíticos, assim como Leibniz afirmava. Entretanto, para que Leibniz pudesse afirmar isso, ele teve de ampliar as relações que, em um primeiro ponto de vista, se assemelham a relações que imbricam em juízos sintéticos, ao nível de relações analíticas na perspectiva da mente divina, para a qual todas as relações, mesmo as contingentes, seriam analíticas, no limite. Kant, para garantir a característica apriorística dos enunciados da aritmética, não pode fazê-lo pela via analítica, por sua limitação de identidade inerente ao predicado em relação ao sujeito em todas as condições analíticas, o que impede qualquer novidade ampliativa do conhecimento. Em Leibniz, pela duplicidade que vimos em qualquer relação entre elementos, um enunciado que, do ponto de vista do entendimento humano, seria ampliativo do conhecimento (sendo, portanto, sintético, pela definição kantiana), pela perspectiva divina seria analítico e não dotado de caráter ampliativo, mas sim explicativo. Em Kant, essa duplicidade não ocorre, e os enunciados precisam ceder à caracterização sintética a *priori*. Mas Frege pretende que os enunciados aritméticos sejam, ao mesmo tempo, ampliativos, como Kant afirmava, mas analíticos, como Leibniz pressupunha. Porém, diferentemente de Leibniz, não em seu caráter de duplicidade e de perspectiva divina.

Para conseguir realizar seu intento, Frege necessita demonstrar uma visão ampliada dos juízos analíticos e das instâncias nas quais eles atuam sobre os enunciados da

[56] Wenn wir die Zahl durch Zusammenfassung von verschiedenen Gegenständen entstehen lassen wollen, so erhalten wir eine Anhäufung, in der die Gegenstände mit eben den Eigenschaften enthalten sind, durch die sie sich unterscheiden, und das ist nicht die Zahl. Wenn wir die Zahl andrerseits durch Zusammenfassung von Gleichem bilden wollen, so fliesst dies immerfort in eins zusammen, und wir kommen nie zu einer Mehrheit. Wenn wir mit 1 jeden der zu zählenden Gegenstände bezeichnen, so ist das ein Fehler, weil Verschiedenes dasselbe Zeichen erhält. Versehen wir die 1 mit unterscheidenden Strichen, so wird sie für die Arithmetik unbrauchbar (Idem, §39).

aritmética. Frege não possui o compromisso leibniziano de contemplar a mente divina em sua lógica, mas possui a necessidade lógica de inserir uma região que reúna todos os fatos lógicos e toda a aritmética em um conjunto que represente a totalidade desses elementos. Não realizar essa tarefa implica, possivelmente, conceber um universo que contém o infinito de caráter potencial. Mas tal concepção, para a tradição tanto da lógica quanto da matemática, da qual Frege se faz herdeiro, é inconcebível. Assim como para Leibniz, o infinito é atual e se encontra em uma totalidade que deve ser representada de alguma forma. No entanto se, para Frege, constituir essa totalidade não se dá de uma forma extrínseca aos próprios elementos que compõem a realidade, como a mente divina, tampouco seria aceitável a hipótese da percepção constituir esse horizonte de totalidade. Essa totalidade deve ser, como já dissemos, intrínseca à própria lógica e à aritmética, e deve incluir o próprio infinito. Heck (2012), denota esse critério de construir os próprios fundamentos do infinito intrinsecamente à própria aritmética, como se segue:

> (...) O desenvolvimento da aritmética de Frege, portanto, não necessita de um axioma da infinitude 'externo' à aritmética, mas somente um que seja 'interno' a ela. (HECK, R. Reading Frege's Grundgesetze, pg. 15)[57]

É nesse sentido que Frege radica os números em um campo próprio, mais amplo, o do enumerável, que abrange todo o intuível, mesmo o pensável. De acordo com Frege:

> As verdades Aritméticas governam o domínio do enumerável. Este é o mais inclusivo; pois não lhe pertence apenas o efetivamente real, não apenas o intuível, mas todo o pensável. Não deveriam, portanto, as leis dos números manter com as do pensamento a mais íntima das conexões?[58] (FREGE, G. Os *Fundamentos da Aritmética*, §14).

[57]Frege's development of arithmetic therefore does not need an axiom of infinity 'external' to arithmetic but only one that is 'internal' to it (HECK, R. Reading Frege's Grundgesetze, pg. 15).

[58] Die arithmetischen Wahrheiten beherrschen das Gebiet des Zählbaren. Dies ist das umfassendste; denn nicht nur das Wirkliche, nicht nur das Anschauliche gehört ihm an, sondern alles Denkbare. Sollten also nicht die Gesetze der Zahlen mit denen des Denkens in der innigsten Verbindung stehen? (Idem, §14)

Essa conexão, ademais, consiste no ponto de permeabilidade entre matemática e linguagem, entre os números e o pensamento. Essa instância faz com que os números compartilhem das mesmas leis do pensamento, e essas leis, por serem leis lógicas, seriam analíticas.

Enquanto para Kant estava claro que o conhecimento aritmético é baseado na construção de instâncias de conceitos, o caminho de Frege segue pelo conhecimento aritmético ser analítico. O principal argumento de Frege contra Kant é que o conhecimento não pode ser construído por conceitos instanciados de objetos espaço-temporais, pois a intuição de objetos não contempla um problema de outra natureza: a de que tudo o que é pensável, para Frege, pode ser contado. Na terminologia fregiana, isso implica dizer que tudo o que cai sob um conceito preciso é contável. E isso acarreta uma oposição ao pensamento kantiano. Se tudo o que cai sob um conceito preciso é contável, então cada parte componente de um conceito é contável, e isso faz com que um conceito se torne, na verdade, uma espécie de conjunto. De fato, Textor afirma que a definição corrente de "enumerável" se aplica a conjuntos. Textor afirma:

> Em seu atual significado padrão, 'enumerável' aplica-se a conjuntos. Um conjunto é enumerável se, e somente se, os seus membros podem ser colocados em um-para-um com um ou outro conjunto dos números naturais ou um subconjunto deste conjunto. Se tudo o que é pensável é enumerável, essa noção de contagem é muito estreita. Por exemplo, os pontos entre os pontos A e B de uma linha são contados, mas o conjunto contendo esses pontos não pode ser colocado em um-para-um com o conjunto de números naturais. "Objeto Contável" deve ser entendido como "objeto de um tipo que é passível de contagem"[59] (TEXTOR, M. Frege on Sense and Reference, pg. 10).

Percebemos que a dimensão do que é enumerável ultrapassa aquilo que os números naturais contemplam e, em contrapartida, aquilo que a intuição espaço-temporal

[59] In its current standard meaning 'countable' applies to sets. A set is countable if, and only if, its members can be put into a one-to-one correspondence with either the set of natural numbers or a subset of this set. If every thinkable is countable, this notion of count-ability is too narrow. For instance, the points between points A and B on a line are countable, but the set containing these points cannot be put into a one-to-one correspondence with the set of natural numbers. 'Countable object' should therefore be understood as 'object of a kind that is amenable to counting' (TEXTOR, M. Frege on Sense and Reference, pg. 10).

abrange. Essa concepção terá grandes implicações no modo como Frege irá conceber a definição de *analítico* como fundamento do logicismo, conforme veremos adiante. Dessa forma, a Aritmética, se devesse sua justificação a alguma forma de intuição *a priori*, culminaria por ter uma dimensão mais estrita do que de fato possui. É pensando nisso que Frege afirma, nos *Fundamentos da Aritmética*:

> Kant pretende recorrer à intuição de dedos ou pontos, no que se arrisca a permitir, contra sua opinião, que elas apareçam como empíricas; pois a intuição de 37863 dedos não é, de modo algum, pura. Também a expressão "intuição" não parece adequada, visto que já dez dedos, em virtude da disposição de uns em relação aos outros, podem ocasionar as mais diversas intuições. Temos, pois, enquanto tal, uma intuição de 135664 dedos ou pontos? Se a tivéssemos, e se tivéssemos uma de 37863 dedos e uma de 173527 dedos, a correção de nossa equação deveria evidenciar-se imediatamente, ao menos no que concerne a dedos, fosse ela indemonstrável; mas não é o que ocorre [60] (FREGE,G. *Fundamentos da Aritmética*, §5).

Frege inviabiliza a atuação da intuição, tal como Kant a concebia, para lidar com a amplitude da Aritmética. Afinal, se o domínio de tudo o que é contável excede o domínio dos objetos que podem ser conhecidos pela intuição espaço-temporal, então precisamos de um elemento adicional, cuja capacidade de generalização vá além do caso restrito da intuição *a priori*. E, para tal, esse conhecimento deve estar arraigado na Aritmética.

O que Frege nos apresenta aqui pode ser entendido como uma ruptura com a linha demarcatória estabelecida por Kant, na qual os conhecimentos analíticos seriam

[60] Kant will die Anschauung von Fingern oder Punkten zu Hilfe nehmen, wodurch er in Gefahr geräth, diese Sätze gegen seine Meinung als empirische erscheinen zu lassen; denn die Anschauung von 37863 Fingern ist doch jedenfalls keine reine. Der Ausdruck „Anschauung“ scheint auch nicht recht zu passen, da schon 10 Finger durch ihre Stellungen zu einander die verschiedensten Anschauungen hervorrufen können. Haben wir denn überhaupt eine Anschauung von 135664 Fingern oder Punkten? Hätten wir sie und hätten wir eine von 37863 Fingern und eine von 173527 Fingern, so müsste die Richtigkeit unserer Gleichung sofort einleuchten, wenigstens für Finger, wenn sie unbeweisbar wäre; aber dies ist nicht der Fall. (Idem, §5)

nominativos e os conhecimentos sintéticos seriam semânticos. Pela definição anteriormente dada por Coffa (2003), os conhecimentos analíticos seriam clarificatórios, ou explicativos, pois fariam jus à sua natureza nominativa dos conceitos. Os conhecimentos sintéticos, por sua vez, ampliativos, da ordem dos significados. Os conhecimentos analíticos seriam imediatos em suas relações e no processo de análise, enquanto que os conhecimentos sintéticos seriam mediados pela intuição.

De acordo com Coffa:

> Algo deve fundamentar julgamentos sintéticos e não pode ser conceitos; portanto, tem que ser intuições, como intuições empíricas do tipo que Hume gostava. Mas agora descobrimos que alguns juízos sintéticos são *a priori*, portanto não podem ser fundamentados por uma intuição empírica. Portanto, deve haver uma espécie de intuição muito especial e não-empírica - vamos chamá-la simplesmente de "intuição pura"[61] (COFFA, A. idem, pg. 19).

Essa definição, entretanto, se dá desde que consideremos a linha demarcatória entre conhecimentos analíticos e sintéticos da mesma forma que Kant considerou. Porém, Frege considera outro elemento no conjunto proposto: a enumerabilidade inerente a todo conhecimento analítico que, na concepção fregiana acima enunciada, ultrapassa as instâncias nominativas e semânticas, o efetivamente real e o intuível, e os inclui em todo o pensável. A distinção entre analítico e sintético deixa de ter relação direta entre juízos clarificatórios e ampliativos, assim como, de certa forma, deixa de ter relação direta com a dinâmica sujeito-predicado.

Dissemos que o objetivo do logicismo consiste principalmente em estabelecer a natureza analítica da Aritmética. Apesar dessa posição, como ficam os enunciados até então considerados sintéticos a *priori*? De que forma a aritmética pode ser considerada analítica? Dificuldade semelhante foi enfrentada por Leibniz, de acordo com Kneale & Kneale. A convicção de Leibniz de que toda verdade, sendo auto-evidente, é

[61] *Something* must ground synthetic judgements, and it cannot be concepts; hence, it has to be intuitions, such as empirical intuitions of the sort Hume liked. But we have now discovered that some synthetic judgements are a priori, so they cannot be grounded by an empirical intuition. Hence, there must be a very special, nonempirical sort of intuition - let us simply call it 'pure intuition' (COFFA, A, idem, pg. 19).

necessária, o fez pressupor que toda verdade científica acerca da realidade precisa ser analítica. Mediante a *Ars Combinatoria*, seria possível deduzir todas as verdades analiticamente. Mas o que dizer dos conhecimentos oriundos da ciência natural? De acordo com Kneale:

> Como Spinoza, Leibniz adere à ininteligível doutrina de que a experiência não é mais do que pensamento confuso e fala da natureza como se se tratasse de um fragmento da matemática pura que tivéssemos que tentar reconstruir a partir das peças que o integram[62] (KNEALE, K. The development of logic, pgs 335-336).

Frege herda, de certa forma, essa concepção negativa das ciências naturais e do conhecimento dito empírico. Porém, a confusão mencionada por Leibniz é considerada por Frege como oriunda da linguagem. Entretanto, algo que não fica claro em Leibniz é de que forma seria possível resgatar esse conhecimento fragmentado do mundo. Como conferir validade lógica para conhecimentos oriundos da experiência ou mesmo da intuição? Para Frege, a criação da própria *Conceitografia* foi o primeiro passo nesse sentido[63], mas ainda assim se faz necessário contextualizar o problema no qual essa *lingua characterica* se tornará operatória e dotada do sentido que Frege pretende para o logicismo. Como tal, o §14 dos *Fundamentos da Aritmética* apresenta o problema fundamental de Frege: tudo o que é intuível possui uma fundamentação em axiomas geométricos, desde a concepção fictícia até as concepções possíveis. Dessa forma, qualquer pensamento estruturado em axiomas geométricos ou que se reporte à intuição

[62] Like Spinoza, he maintains the unintelligible doctrine that experience is confused thinking, and talks of nature as though it where a piece of pure mathematics which we must try to reconstruct from fragments (KNEALE, K. The Development of Logic, pgs. 335-336).

[63] Em 1879, Frege se fundamentava em dois pressupostos, que ele expressa, especificamente contra o caráter supostamente sintético da aritmética, no § 23 da *Conceitografia*: 1. A determinação de cadeias de inferências sem lacunas. Muitas proposições aparentemente consideradas sintéticas devem isso a lacunas em sua cadeia de inferências, parecendo, assim, recorrerem à intuição; 2. O emprego sistemático da *Conceitografia* como método para evidenciar as cadeias de inferências sem incorrer nas ambiguidades da linguagem. Com esse pressuposto, Frege empreende uma série de demonstrações nos parágrafos seguintes para demonstrar sua hipótese. O primeiro princípio que apresentamos constitui o ponto de partida tanto dos *Fundamentos da Aritmética* quanto das *Leis Básicas da Aritmética.*

temporal ou espacial será sintético a *priori* ou *posteriori*. Essa foi a concepção kantiana a respeito da Geometria e da Aritmética. Entretanto, Frege entende que, se considerarmos a fundamentação acima como suporte das verdades aritméticas, haverá confusão e, mesmo o pensamento, tornar-se-á impossível. Entendemos por impossível a ocasião de serem contraditórios ou acarretar contradição. Portanto, as verdades aritméticas não podem igualmente governar o domínio do intuível, tampouco nele se fundamentar. É na tentativa de fugir do domínio do intuível que Frege apresenta o domínio distinto do enumerável, que não recorre de forma alguma à intuição temporal ou espacial, e na qual as verdades aritméticas constituem toda uma realidade lógica. Entretanto, a introdução desse domínio, com o contexto em que é apresentado, acarreta um conjunto de problemas. Primeiro, se ele é apresentado em contraposição ao domínio do intuível, como o lugar das verdades aritméticas em contraposição às verdades geométricas, então, igualmente em contraposição, seus juízos serão analíticos, e não sintéticos. Esse seria o passo monumental para fundamentar o logicismo, que consiste precisamente em demonstrar que as verdades aritméticas são analíticas, e não sintéticas a *priori*. Porém, Frege afirma que o domínio do enumerável é o mais inclusivo, pois contém não apenas o intuível, não apenas o efetivamente real (ou atual), mas todo o pensável. Se é assim, como o domínio do enumerável pode se contrapor ao domínio do intuível? Como ele pode definir as verdades aritméticas em contraposição às verdades geométricas, se ele as contém? O segundo problema, decorrente do primeiro, consiste em saber, nesse caso, como é possível não cair na confusão e na impossibilidade do pensamento que o próprio Frege indicou que o domínio do intuível produz ao ser transposto como fundamento para as verdades aritméticas?

O domínio do enumerável constitui todo o campo regido pelas verdades aritméticas, que Frege pretende ser analítico. Entretanto, ao dizer que o domínio do enumerável é o mais inclusivo, pois inclui todo o intuível, todo o efetivamente real e todo o pensável, isso não torna tal domínio o espaço de todos os juízos, inclusive os juízos sintéticos a *priori*, que era precisamente o que ele pretendia evitar?

Porém, a saída de Frege, ao introduzir o enumerável sobre todo o pensável, não incorre nas questões que levantamos. As contradições aparentes só ocorreriam se houvesse uma completa planificação entre o enumerável e os enunciados que podem ser enumerados. O que, de fato, devemos nos perguntar é: em que sentido o domínio do enumerável enumera? O que significa dizer que algo pensável é enumerável?

O domínio do enumerável geralmente não acarreta, entre os comentadores de Frege, muita atenção. Entretanto, conceitualmente falando, esse domínio nos parece significativo para a análise que estamos desenvolvendo, na medida em que ele parece ter uma relação estratégica com o percurso de Frege para dissolver os problemas oriundos da abordagem leibniziana e kantiana acerca dos números.

O domínio do enumerável surge subitamente no contexto dos fundamentos, e apresenta a relevância da abrangência sobre a inclusão dos enunciados pensáveis, para além dos intuíveis. E justamente por isso, Frege compreende que é nesse domínio que se encontram as leis que regem tanto os enunciados aritméticos quanto os pensamentos. Essa conexão nos chama atenção, uma vez que Frege também apresenta outro domínio, o objetivo não-efetivo, em contraposição ao domínio efetivo e ao domínio subjetivo.

O domínio subjetivo se caracteriza como o campo de enunciados pessoais, permeados de características não partilháveis, particulares. O domínio efetivo é o campo do que Frege chama de efetivamente reais, e que é perceptível pela experiência tendo, portanto, uma força coercitiva empírica. Por fim, temos o domínio objetivo não-efetivo, caracterizado como o campo dos enunciados que se originam apenas da razão (ainda que possa, inicialmente, ser estimulado mediante uma experiência), e que Frege apresenta como enunciados que são apreendidos pelo pensamento, mas não imaginados por ele mediante processos psíquicos, como o seriam com as representações. O domínio objetivo efetivo seria o domínio mediante o qual nossas percepções apreendem objetos sensíveis, enquanto que o campo objetivo não-efetivo diz respeito aos objetos não-sensíveis, mas perceptíveis pela razão, como a linha do equador e o centro de massa do sistema solar. Independente do que é efetivo ou não-efetivo, no entanto, a característica que se mantém a mesma sobre os dois domínios é que ambos são comunicáveis. Afirma Frege:

> O espaço, segundo Kant, pertence ao fenômeno. Seria possível que seres racionais diferentes o representassem de maneira completamente diferente. Na verdade, nunca podemos saber se ele aparece a uma pessoa como a uma outra; pois não podemos colocar a intuição espacial de uma ao lado da intuição da outra a fim de compará-las. Entretanto, há ainda nelas algo objetivo; todos reconhecem os mesmos axiomas geométricos, ainda que tão-somente de fato, e devem fazê-lo a fim de poderem orientar-se no mundo. Nelas é objetivo o que é conforme a leis, conceitual, judicável, o que deixa exprimir em palavras [64] (FREGE, G. *Fundamentos da Aritmética* §26).

A diferença entre o domínio do enumerável e o domínio objetivo não-efetivo não parece estar na exclusão completa de enunciados ou juízos fundamentados na intuição, uma vez que estes também possuem algo de objetivo. Entretanto, ainda assim, são domínios diferentes. O domínio objetivo não-efetivo, como vimos, contém todos os enunciados em conformidade com a lei do pensamento, cuja estrutura conceitual e judicável permite que sejam expressos em palavras[65]. O domínio do enumerável, porém, contém todos os enunciados contáveis. O que é contável nos enunciados? O que seria contável em um enunciado como *Vênus é a estrela da manhã*? De acordo com Frege, a enumerabilidade do pensável sempre pode aparecer mediante a apresentação de

[64] Der Raum gehört nach Kant der Erscheinung an. Es wäre möglich, dass er andern Vernunftwesen sich ganz anders als uns darstellte. Ja, wir können nicht einmal wissen, ob er dem einen Menschen so wie dem andern erscheint; denn wir können die Raumanschauung des einen nicht neben die des andern legen, um sie zu vergleichen. Aber dennoch ist darin etwas Objectives enthalten; Alle erkennen dieselben geometrischen Axiome, wenn auch nur durch die That, an und müssen es, um sich in der Welt zurechtzufinden. Objectiv ist darin das Gesetzmässige, Begriffliche, Beurtheilbare, was sich in Worten ausdrücken lässt.(FREGE. G, Idem, §26)

[65] Vide, por exemplo, o §26 dos *Fundamentos da Aritmética*. Ao final do parágrafo, Frege apresenta o exemplo da descrição da cor branca presente na neve. A despeito da subjetividade que surge em quaisquer descrições dessa natureza, existe algo de *objetivo*, que Frege enuncia como *qualidade objetiva* (objective Beschaffenheit). Essa qualidade objetiva é independente ao sentir ou intuir, mas não é independente da razão, o que lhe confere o parâmetro necessário para que possa ser compartilhada.

conceitos supervenientes[66]. Um exemplo dado por Frege é sobre a palavra “ouro”. Em si mesma, a palavra não remete a nenhuma instância numérica. Mas ao inserirmos um conceito superveniente como “letras da palavra ouro”, o número 4 é descoberto. Esse passo a respeito do enumerável prepara, na realidade, dois elementos específicos para sua concepção analítica do logicismo. O primeiro deles é que esses conceitos supervenientes geralmente aparecem como uma indagação numérica sobre algo. Essa indagação numérica, ao longo dos *Fundamentos*, assumirá a forma “o número que convém ao conceito x”. Essa indagação sobre a enumerabilidade de um conceito, no entanto, não é uma indagação sobre o próprio enunciado em questão, mas sim sobre a relação que subjaz ao próprio enunciado. Diante de um enunciado como *Europa, Ganimedes, Io e Callisto são luas de Júpiter*, ao indagarmos “o número que convém a conceito luas de Júpiter”, não estamos indagando sobre os objetos sensíveis enunciados como sendo as luas de Júpiter, mas sim sobre o número de objetos que caem sob o conceito *luas de Júpiter*. E ao fazermos tal indagação, estamos inquirindo sobre uma propriedade estabelecida, não em uma relação de primeiro nível presente no enunciado, mas sim sobre uma relação de segundo nível que estabelece uma propriedade de conceito. Estamos indagando sobre a cardinalidade de um conceito. E como se trata de uma relação de segundo nível, a estrutura desse conceito superveniente é decorrente de um princípio de operador de cardinalidade, que pode ser expresso como *“NxFx”* (o número que convém ao conceito F).

No sentido em que estamos realizando essa abordagem, podemos compreender o domínio do enumerável como o campo no qual Frege se abstrairá, no núcleo de cada enunciado, dos níveis nos quais os mesmos são entendidos em uma lógica intensional, e os abordará ao nível da lógica extensional. Em outras palavras, os enunciados, tomados em uma relação de primeiro nível, possuem elementos que se encaixam na abordagem dos juízos sintéticos a *priori* ou a *posteriori*. Mas, subjazendo a esses enunciados, existem relações de segundo nível, que determinam propriedades de

[66] Do original: Der hinzutretende Begriff, cf. Grundlagen der Arithmetik, §58.

conceitos, dentre os quais a cardinalidade deles em relação ao número de objetos que caem sob aquele conceito. Nesse aspecto, a *lingua characterica* de Frege transcende os próprios limites, ao se tornar o aparato operatório desses enunciados de segundo nível. Mais do que indicar um conjunto de grafos conceituais, a estrutura que organiza esses grafos, funções e argumentos, conceitos e objetos, em relações necessárias de saturabilidade, criam as condições para o campo operatório onde ocorrem as relações de segundo nível, nas quais as leis do pensamento se engendram, mediante enunciados analíticos. Essa é a saída na vertical de Frege em relação à planificação que ele criticara metaforicamente nos *Fundamentos da Aritmética*, planificação onde todos, mesmo Leibniz, se digladiavam.

A solução que fundamenta o logicismo fregiano permite, por exemplo, que um enunciado como *Júpiter tem quatro luas*, enunciado esse que não pode ser analítico, possa, no que tange à enumerabilidade, acarretar um enunciado que atribui uma cardinalidade ao conceito *luas de Júpiter*. Uma vez que o enunciado superveniente *o número que convém ao conceito luas de Júpiter* atribui o número quatro ao conceito, está atribuindo uma propriedade analítica ao conceito, tal qual a atribuição de existência. Nos *Fundamentos*, ambas as atribuições de segundo nível estão relacionadas[67]. Um conceito só existe quando o número de objetos que cai sob ele for maior que zero. De acordo com Boolos (1998) embora a concepção ingênua de conjuntos de Frege tenha resultado na inconsistência já conhecida pelo paradoxo Zermelo/Russell, estruturas de níveis se tornam fundamentais para a lógica do século XX, mais especificamente em

[67] O §53 dos *Fundamentos da Aritmética* estabelece a relação fundamental entre a *existência* e o operador de cardinalidade. De acordo com Frege: “Sob este aspecto a existência assemelha-se ao número. De fato, a afirmação de existência nada mais é que a negação do número zero” (do original em alemão: In dieser Beziehung hat die Existenz Aehnlichkeit mit der Zahl. Es ist ja Bejahung der Existenz nichts Anderes als Verneinung der Nullzahl). Por serem ambas propriedades de conceito, não poderiam ser notas características destes. Por esse motivo, Frege nega que a existência poderia fazer parte da prova ontológica do conceito “Deus”: “Por ser a existência propriedade de conceito, a prova ontológica da 'existência de Deus não atinge seu objetivo. Tanto quanto a existência, porém, a unicidade não é uma nota característica do conceito 'Deus'” (do original em alemão: Weil Existenz Eigenschaft des Begriffes ist, erreicht der ontologische Beweis von der Existenz Gottes sein Ziel nicht. Ebensowenig wie die Existenz ist aber die Einzigkeit Merkmal des Begriffes „Gott“).

Russell e Zermelo que, buscando resolver a inconsistência do sistema fregiano, elaboraram sistemas que empregam a estrutura de níveis como um modelo que fundamenta o infinito em conjuntos, mediante a ampliação do conjunto domínio como novos níveis inclusivos, sem que haja um topo, em dois modelos formais: o estratificado e o cumulativo[68].

Em Frege, no entanto, a estrutura de formalização em níveis diz respeito a uma lógica de relações, que de certa maneira justifica epistemologicamente as atribuições de objetos aos conceitos. Mas essa verticalização de níveis de Frege acarreta um problema grave. Se dizemos que a propriedade de um conceito diz respeito ao número de objetos que podem saturá-lo, ou seja, que caem sob ele, estamos determinando o conceito em um atributo fundamental. Dizer que ao conceito *luas de Júpiter* convém o número 4 implica dizer que, a esse conceito, qualquer outro valor atribuído será falso. Mas, atualmente, considera-se que, além das quatro luas nomeadas, Júpiter possui mais setenta e cinco luas. Se Frege ignorar essa questão, ele ficará restrito a assumir apenas enunciados de primeiro nível que já são reconhecidos como analíticos. Mas, fazer isso acarreta a ruína de seu projeto de demonstrar que a Aritmética não é sintética a *priori*. Então, o que Frege faz não é excluir da abordagem todos os enunciados sintéticos, mas sim deslocá-los de suas fontes sintéticas do conhecimento para fontes de determinação extensional de segunda ordem. Lembremos que essas fontes sintéticas estão relacionadas à lógica intensional. Para Frege, adotar a lógica extensional implica tomar os termos em suas relações internas isoladas, em suas relações de saturação entre conceitos e objetos. Portanto, se em 1884 diz-se que o pensamento de que *o número de luas de Júpiter é quatro é verdadeiro*, assim se deu porque o conceito *luas de Júpiter* possui o número 4 como conveniente para o número de objetos que caem sob ele. Mas se, como dissemos, Júpiter possui setenta e nove luas no total, de acordo com Frege, isso não alterará os valores de verdade do pensamento expresso em 1884. O que teremos é um novo pensamento, no qual o enunciado de que, *no ano de 2019, o número de luas de Júpiter é setenta e nove, é*

[68] BOOLOS, G. Logic, Logic and Logic, pg. 3.

verdadeiro. Isso acontece porque Frege reconhece uma espécie de função do tempo sobre alguns enunciados. Naturalmente, como esse enunciado recorre a uma intuição temporal, à sensibilidade como fonte de origem dos elementos que compõem o enunciado em suas relações de primeiro nível, isso influenciará as relações de segundo nível. Pressupõe-se, com isso, que os enunciados atuais apenas estão incompletos ao não mencionarem as condições temporais que caracterizam e diferenciam os conceitos. Postos estes anteparos aos enunciados, Frege isola o fator tempo e, com isso, consegue “intemporizar” diversos enunciados ao longo do tempo. A consequência que advém dessa manobra é que sempre existirá uma sombra de virtualidade, ou de indefinibilidade de objetos que formam o percurso de valor de cada conceito. Portanto, em decorrência disso, enquanto atribuição enumerável de conceitos, os valores fixos que convém a cada conceito F serão, sempre, valores “locais”, isto é, válidos no tempo em que estamos enunciando algo sobre tal conceito F. Ou, dizendo de outra forma, os valores fixos que convém a cada conceito F serão sempre válidos no contexto de cada proposição, em conformidade com o princípio de contexto.

Esse conjunto cria uma circunstância inusitada. Aparentemente, enunciados fundamentados em juízos sintéticos a *priori* em uma lógica intensional podem, na circunstância de seu pronunciamento, possuírem valores de verdade que, entretanto, podem não se manter ao longo do tempo, precisamente por conta de sua natureza sintética. Mesmo nesses casos, porém, Frege constrói um recurso descritivo. Desde que a descrição das condições atinentes ao enunciado seja acrescentada ao pensamento, o conceito que as abrange comporta essa referencialidade, de modo que seu valor de verdade adquire intemporalidade. Daí a necessidade de esclarecimentos das condições temporais ou espaciais que caracterizam enunciados dessa natureza, pois também os conceitos enunciados aí possuem atributos enumeráveis. Isso, no entanto, implica que um pensamento pode se desdobrar em muitos outros, tantos quantos demonstrarem apresentar características contextuais distintas. O §46 dos *Fundamentos da Aritmética*, por exemplo, apresenta a seguinte questão: o que acontece com enunciados como "habitante do império alemão", no que diz respeito ao número que convém ao conceito? A resposta para esse enunciado será verdadeira apenas quando o mesmo for circunstanciado por uma complementacão temporal. Enunciados temporais não se constituem enunciados oriundos de uma esfera privada, ou resultante de uma representação pessoal e subjetiva. Eles se enquadram na categoria de pensamento. Porém, tais enunciados possuem um componente variável, que Frege denomina "função do tempo" (Function der Zeit). Em tal caso, os objetos que caem sob o conceito "habitante do império alemão", enquanto indicação numérica, serão verdadeiros ou falsos em função da referência temporal a que dizem respeito. Dessa forma, o valor de verdade de tais enunciados permanece suspenso enquanto não for determinado o valor da função do tempo que circunscreve o fato enunciado. Como Frege dirá em seguida:

> Que uma indicação numérica exprima algo fatual, independente de nossa apreensão, pode surpreender apenas quem tome o conceito por algo subjetivo, como a representação. (FREGE, G. Os *Fundamentos da Aritmética*, §47)

O que mais chama a atenção para esse argumento é que, uma vez determinado o valor temporal para o enunciado, o valor de verdade da indicação numérica será determinado não apenas a partir daquele momento, mas eternamente. Enquanto não ocorre a complementação temporal, a lacuna presente em uma variante como "*a* habita o império alemão" faz com que todo o conceito seja fluído, variável como é próprio da função até que seja determinado um valor. Não se trata, nesse caso, de uma característica linguística. A ausência de indicação temporal não exclui a existência da função do tempo de tais enunciados, pois eles caracterizam um fato do qual enunciamos algo. A característica é lógica, de maneira que o valor de verdade de tais enunciados será determinado e *encapsulado* pela eternidade a partir, e somente a partir, de sua indicação temporal.

O exemplo dado por Frege da quantidade de habitantes da Alemanha é um exemplo de pensamento que se torna distinto a cada vez que é enunciado, devendo ser acrescido dos anteparos temporais já mencionados. Isso nos faz perguntar sobre como podemos saber os limites que determinam quando um pensamento deverá tornar-se distinto de outro de natureza similar. Frege nos dá clara ideia disso já na *Conceitografia*[69], ao desenvolver, mediante a lógica extensional, os meios para determinarmos a igualdade entre dois enunciados. Enquanto o número de objetos que caem sob um conceito forem os mesmos, dois enunciados podem ser considerados iguais, mantendo-se seus valores de verdade. Em outras palavras, enquanto mantiverem as mesmas extensões de conceito. A igualdade entre duas extensões de conceitos, expressa pelo *Princípio de Hume*, consiste em um desdobramento do operador de cardinalidade: $NxFx=NxGx \leftrightarrow F\approx G$ (onde dizemos que o número de Fs será o mesmo que o número de Gs se, e somente se, houver uma correspondência biunívoca entre os objetos que são Fs e os objetos que são Gs). Frege manterá essa posição e, de forma ainda mais explícita, em "Sobre o Sentido e Referência" (1892), ele deixa claro que, para tal questão a lógica extensional tem primazia sobre a lógica intensional, pois ainda que os sentidos entre dois ou mais enunciados difiram entre si, mantendo-se seu percurso de valor, *salva veritate*, estes devem ser considerados iguais. Dessa forma, enquanto diversos sentidos pelos quais podemos enunciar um referente não alterarem seus percursos de valor, pela lógica extensional, os enunciados são iguais. Na medida em que o número de objetos que cai sob um conceito se alterar, isso significa que algo mudou, inclusive na cardinalidade desse conceito, pois seu atributo enumerável terá se alterado. Nesse caso, o enunciado deve ser acrescido de alguma nota descritiva e constituirá novo pensamento. O ponto crucial de todos esses elementos é que, em todos esses casos,

[69] No §3 da *Conceitografia*, por exemplo, Frege chama atenção ao fato de que a relação sujeito-predicado não possui relevância para a construção do conteúdo judicável. Ao recorrer ao exemplo da proposição "Em Plateia derrotaram os gregos aos persas" e "em Plateia foram derrotados os persas pelos gregos", Frege atribui uma distinção de sentido que, não obstante, não interfere na concordância dos conteúdos judicáveis. Isso faz com que, no §4, Frege considere os juízos categóricos, hipotéticos e disjuntivos, tão somente com distinção gramatical, tal qual com o sujeito-predicado. Outro ponto significativo se encontra no §8, a respeito do sinal de igualdade. Embora Frege não tivesse estabelecido a distinção entre sentido e referência, ele reconhece que nomes distintos a respeito do mesmo conteúco judicável podem surgir em decorrência dos modos de determinação deste conteúdo. Embora, nesse caso, possuam sentidos diferentes, o juízo indicará que se tratam de nomes referentes ao mesmo conteúdo judicável. Ademais, as demonstrações construídas pela *Conceitografia* a partir do §23, e que se pautam especificamente em construir relações entre conceitos e objetos como sua extensão, representam o contraponto formal entre Frege e Kant, onde ele demonstra que apenas em aparência as proposições seriam sintéticas, sendo, na verdade, analíticas.

Frege demonstra como, pela extensionalidade, é possível extrair enunciados de origem analítica, fundamentados tão somente na lógica (extensional) sobre enunciados de primeiro nível com relações declaradamente consideradas sintético a *priori*.

Outro ponto fundamental é que, ao proceder dessa forma, Frege está cristalizando juízos a respeito da atualização de um conceito, mas reserva uma potencialidade imanente a ele. Dizer, por exemplo que $\vdash\!\!\top\!\!\!-\, A$, significa dizer que a circunstância de *A* não foi realizada. Não ser realizada também constitui um fato, e sobre tal juízo uma série de enunciados analíticos podem ser elaborados, como a não existência de *A* e uma cardinalidade zero de objetos que caem sob *A*. Mas, dizer que a circunstância de *A* não foi realizada não implica dizer que nunca o será. Na condição de algum objeto cair sob ela, ela será realizada. Percebe-se disso que a intemporalidade de juízos recai sob o enunciado, e não sob as relações entre conceitos e objetos. É sobre a totalidade de um pensamento e suas relações internas que o juízo exerce sua validade e obtém sua intemporalidade nos *Fundamentos*.

Sobre este ponto, retornaremos no Capítulo 2, dada sua relevância para as consequências que essa abordagem trará para o logicismo, considerando que ela será reiterada por Frege em 1918. Vale ainda indicar que todos esses anteparos podem ser considerados uma alternativa lógica de Frege para conseguir expressar os conhecimentos analíticos em meio a juízos sintéticos de uma forma distinta do modelo planificado leibniziano, onde as instâncias que separavam os conhecimentos sintéticos dos analíticos estavam na distinção entre a capacidade humana temporal de conhecimento e a capacidade atemporal da mente divina. De acordo com Kneale & Kneale:

> Ele sustenta audazmente que todas as proposições verdadeiras, incluídas as proposições singulares, são virtualmente identidades, por mais que só Deus possa reconhecê-las a priori como tais[70] (KNEALE, K. The Development of Logic, pg. 335).

[70] He boldly maintains that all true propositions, including even singulars, are virtual identities, though God alone can know them all *a priori* (KNEALE, K. The Development of Logic, pg. 335).

Para Leibniz, o caminho traçado de modo geral pelo projeto de um *calculus ratiocinator*, de uma *lingua characterica* e uma *ars combinatoria*, deveriam dar conta de apreender os conhecimentos reunidos a *priori* por Deus em sua totalidade. Devido a isso, no limite, mesmo nos conhecimentos ditos empíricos, em sua reunião de elementos no mundo empreendido por Deus, sempre o conceito-predicado estaria contido no conceito-sujeito. De acordo com Kneale:

> Assim, pois, em toda proposição verdadeira, o conceito-sujeito conterá ao conceito-predicado; e a diferença entre verdades de razão e verdades de fato virá sensivelmente a reduzir-se à impossibilidade de demonstrar estas últimas sem referência àquela superioridade do mundo atual que determinou Deus a preferí-lo dentre todos os mundos possíveis[71]. (Idem)

Frege não se vale desse recurso, tendo de construir logicamente toda a fundamentação para evitar a confusão pela linguagem. Em Frege, diferentemente de Leibniz, não será possível negar os conhecimentos oriundos da experiência, e tampouco pela intuição. Mas o elemento que reúne todos os enunciados e os fundamenta analiticamente não pode ser metafisicamente referenciado como Deus. Como tal, cabe a Frege desenvolver o conjunto de níveis que diferencia a planificação forçada produzida pelo pensamento leibniziano.

Se, em relação a Leibniz, essa solução fregiana permite abordar a aritmética como sendo analítica e definir os números como objetos cuja identidade pode ser definida extensionalmente, em relação a Kant, essa abordagem acarreta duas consequências: a consideração sobre o que será lógica para ambos os pensadores e como a lógica fregiana se estruturará em elementos distintos do sujeito e predicado. Na *Lógica de Jäsche*, encontramos a seguinte passagem acerca do objeto da lógica:

> Pode-se, no entanto, tomar o entendimento humano em geral como o objeto da Lógica; e, nesta medida, ela fará abstração das regras particulares da razão especulativa e, por conseguinte,

[71] In *every* true proposition the subject concept contains the predicate concept, and the difference between truths of reason and truths of fact is simply that the latter cannot be demonstrated without reference to that superiority of the actual which determined God to choose it from among all possible worlds (Idem).

> distinguir-se-á da Lógica do *entendimento especulativo*. (KANT, I. Lógica de Jasche, A15 pg. 37)

Tomar o entendimento humano como objeto da lógica faz com que a lógica kantiana adentre o território epistemológico. A tônica dessa lógica segue a mesma que na *Crítica da Razão Pura*. Segundo Blanchè:

> Enquanto que a lógica geral ou formal faz abstração de todo o conteúdo do conhecimento para só encarar a forma do pensamento, a lógica transcendental tem por objeto determinar a origem, extensão e o valor dos conhecimentos pelos quais pensamos objetos inteiramente *a priori* (Blanchè, R. História da Lógica, pg. 250)

Enquanto a abordagem kantiana o leva a um comprometimento com o entendimento humano a partir do como pensamos objetos *a priori*, a abordagem de Frege, ao seguir pela analiticidade não só das leis lógicas do pensamento, como das leis da Aritmética, recai sobre o "verdadeiro", conforme ele afirma nos *Fundamentos*:

> O conceito relacional pertence pois, como o simples, à lógica pura. Não entra aqui em consideração o conteúdo particular da relação, mas tão-somente sua forma lógica. E o que desta se puder enunciar será analiticamente verdadeiro e conhecido a *priori*. Isto vale tanto para os conceitos relacionais como para os demais[72]. (FREGE, G. Os *Fundamentos da Aritmética*, §70)

Por outro lado, a abordagem de Frege, ao introduzir a enumerabilidade à nominatividade e semântica da lógica, rompendo os limites estabelecidos entre os juízos clarificatórios e ampliativos também colocou o projeto logicista em risco. MacFarlane (2002) e Dummett (1973), por exemplo, argumentam que a Lógica de Frege, apresentada na *Conceitografia*, não seria exatamente uma lógica, por conter algo externo a ela, a saber, a função, elemento da Análise, fazendo de sua lógica uma espécie de matemática aplicada às proposições. MacFarlane, em seu artigo “Kant and Frege, Logical and Logicism*”,* afirma:

[72] Der Beziehungsbegriff gehört also wie der einfache der reinen Logik an. Es kommt hier nicht der besondere Inhalt der Beziehung in Betracht, sondern allein die logische Form. Und was von dieser ausgesagt werden kann, dessen Wahrheit ist analytisch und wird a priori erkannt. Dies gilt von den Beziehungsbegriffen wie von den andern. (FREGE, G. Die Grundlagen der Arithmetik, §70).

> Ficamos, então, com um impasse dialético: Kant pode aceitar a prova de Frege de que conceitos aritméticos podem ser expressos em seu Begriffsschrift como uma demonstração de que o Begriffsschrift não é inteiramente lógico em caráter[73].(MacFarlane, J. *Kant and Frege, Logical and Logicism*, pg. 27)

O próprio Frege tinha consciência do estatuto dúbio que seu método haveria de produzir tanto na comunidade filosófica quanto entre os matemáticos. Ao escrever o *Prólogo às Leis Básicas da Aritmética,* Frege comenta que temia que, seguramente, *as perspectivas de meu livro são pequenas. Em todo caso há que se descontar todos os matemáticos que ao topar com expressões lógicas, como "conceito", "relação", "juízo", pensam: methaphysica sunt, non leguntur! E também os filósofos que ao ver uma fórmula exclamam: mathematica sunt, non leguntur!, e serão muito poucos os que não são de um ou de outro tipo.* (Frege, G. Prólogo às *Leis Básicas da Aritmética*, pg. 5).

Entretanto, Frege não entende que esteja fazendo um tipo específico de matemática com melhoramentos de elementos da lógica pois, após a publicação da *Conceitografia*, em 1879, Frege se dedica a defender sua notação conceitual das comparações feitas com a Lógica matemática de George Boole. Portanto, se a lógica desenvolvida por Frege não consiste puramente em matemática, então cabe demonstrar em que aspectos ela pode ser considerada lógica e em que condições ela se distingue da lógica kantiana.

Uma das mudanças mais radicais e inovadoras de Frege na *Conceitografia,* como já mencionamos, foi a introdução da *função*, operação própria da Análise, para organizar a estrutura proposicional, em detrimento da ordem sujeito/predicado, comum na Lógica tradicional. Para Frege, a forma do sujeito e predicado é oriunda da gramática e, ainda que possa ser utilizada, ela não daria conta de expressar com clareza todas as relações existentes entre conceitos e objetos, resultando em confusões em termos de clareza e

[73] We're left, then, with a dialectical standoff: Kant can take Frege's proof that arithmetical concepts can be expressed in his Begriffsschrift as a demonstration that the Begriffsschrift is not entirely logical in character (MACFARLANE, J.G. Frege, Kant and the Logic and Logicism, pg. 27).

entendimento. A introdução da função, entretanto, tornou-se o principal alvo do argumento de que Frege não estaria constituindo uma lógica pura.

Mas, ao tomá-la da Análise por empréstimo, isso implicaria o mesmo emprego que na Matemática? Para Frege, não é o que ocorre. No artigo “Função e Conceito” (1891), Frege demonstra que a função se encontra na Análise, de fato, mas seu uso, entretanto, seria um uso restrito, que ocultava, de certa forma, as inúmeras possibilidades de seu emprego, desde que fossem restauradas ou identificadas as características gerais, formais e lógicas nas quais o emprego usual da função se fundamentava. O elemento mais geral presente na função, que estrutura cada expressão funcional e que determina as relações numéricas é a *saturação.* A função determina a saturação em uma relação entre termos numéricos, dos quais o termo funcional é insaturado e que necessita de complementação, enquanto que o outro termo, o argumento, consiste na parte saturada, que pode complementar a parte insaturada, correspondendo a um valor que é o produto dessa saturação. Uma parte saturada e uma parte insaturada em relação comum para gerar uma expressão saturada é o fundamento geral e lógico ocultado pela instrumentalização da função que, uma vez revelada, nos permite trabalhar o sentido mais amplo da relação de saturação que ocorre entre as formas lógicas mais simples, conhecidas como *conceito* e *objeto.* Portanto, a relação operada na Análise, por meio da função, seria uma relação lógica de saturação entre conceitos e objetos, denominados como função e argumento.

Logo, quando Frege amplia a ação da função do modo como descrevemos, torna-se possível abordar não apenas a relação entre números, mas também a relação entre os elementos que formam a proposição. Esse processo seria aderente à adoção do critério de enumerabilidade para lidar com os conceitos. Se o enumerável diz respeito a todo o pensável, no limite, as regras não estariam mais limitadas às condições nominais ou semânticas do conhecimento extraído da relação sujeito-predicado, mas sim expresso em um cálculo proposicional determinado pela saturação e operado pela função.

Frege não estaria introduzindo um elemento estranho à lógica ao trabalhar com a função, mas sim restaurando o estatuto lógico desta, num escopo mais geral e formal do que seu uso instrumentalizado pela Análise. Daí a função constituir o núcleo básico do logicismo e definidor de um parâmetro de lógica que não é compartilhado com Kant, mas que não se trata de ser um elemento matemático presente na Lógica.

Além desses pontos, a crítica fregiana em relação aos elementos distintivos do conhecimento analítico e sintético, em seus aspectos nominativos e semânticos, recai diretamente sobre a extensão daquilo que pode ser definido como analítico. Em especial, a crítica à analiticidade nominativa, que veremos a seguir.

1.4 A Crítica à analiticidade nominativa de Kant

A abordagem apresentada até o momento a respeito da estrutura do logicismo resolve duas situações: primeiramente, demonstra um domínio que abarca todas as relações entre conceitos de forma analítica, e, em segundo lugar, escapa aos campos nominativos e explicativos fundamentados na linguagem comum. Mas ainda não explica como seria possível novos conhecimentos surgirem a partir de enunciados oriundos de juízos analíticos. Se, por um lado, a distinção promovida por Frege em relação à lógica distanciará o objeto desta entre os dois pensadores, a escolha do fundamento do conhecimento das leis Aritméticas ser considerado analítico não implica a mesma ideia de analítico kantiano. Frege apresenta nos *Fundamentos* uma versão alternativa para o conceito de *analítico.* Para Frege, conhecimentos novos podem surgir de fontes analíticas sem que elas se tornem sintéticas. De acordo com os parágrafos finais dos *Fundamentos (§87-88)* a falta de um aparato lógico mais dinâmico fez com que Kant considerasse os conceitos como conjuntos de características do sujeito[74]. De acordo com Frege, Kant teria considerado os conceitos como características coordenadas, no sentido alegórico de serem pontos ou linhas já delineados em um plano dado, sendo apenas rearranjados conforme os enunciados. Frege diz:

> Representando-se os conceitos (ou suas extensões) por regiões de um plano, ao conceito definido por características coordenadas

[74] De acordo com Frege: Kant subestimou o valor dos juízos analíticos — como conseqüência de uma determinação demasiadamente estreita de seu conceito — embora pareça ter pressentido o conceito mais amplo aqui utilizado' ". Na base de sua definição, a divisão em juízos analíticos e sintéticos não é exaustiva. Ele pensa no caso do juízo afirmativo universal. Pode-se- então falar de um conceito sujeito e perguntar se o conceito predicado está — conforme a definição — contido nele. Como fazê-lo, porém, quando o sujeito for um objeto singular? Quando tratar-se de um juízo existencial? Não se pode então absolutamente falar, neste sentido, de um conceito sujeito (FREGE, G. Os *Fundamentos da Aritmética*, §88). No original: Kant hat den Werth der analytischen Urtheile offenbar — wohl in Folge einer zu engen Begriffsbestimmung — unterschätzt, obgleich ihm der hier benutzte weitere Begriff vorgeschwebt zu haben scheint*). Wenn man seine Definition zu Grunde legt, ist die Eintheilung in analytische und synthetische Urtheile nicht erschöpfend. Er denkt an den Fall des allgemein bejahenden Urtheils. Dann kann man von einem Subjectsbegriffe reden und fragen, ob der Prädicatsbegriff in ihm — zufolge der Definition — enthalten sei. Wie aber, wenn das Subject, ein einzelner Gegenstand ist? Wie, wenn es sich um ein Existentialurtheil handelt? Dann kann in diesem Sinne gar nicht von einem Subjects-begriffe die Rede sein (FREGE. G. Die Grundlagen der Arithmetik, §88).

> corresponde a região comum a todas as regiões associadas às características, ela será circunscrita por parte de seus limites. No caso de uma tal definição trata-se — para falar por imagens — de empregar as linhas já dadas de maneira nova a fim de delimitar uma região[75]. (FREGE, G. Os *Fundamentos da Aritmética*, §88).

Em outras palavras, é como se a concepção de analítico de Kant equivalesse a um plano cartesiano no qual todas as linhas já estivessem delimitadas e nós apenas as reposicionássemos de acordo com o sujeito dado. Como consequência, nenhum novo conhecimento pode surgir de juízos analíticos.

Em contrapartida, Frege apresenta uma alternativa ao que ele denominou *conceitos como características coordenadas.* São os conceitos, como características, que possuem uma ligação mais profunda, que ele denomina *orgânicas*:

> As determinações fecundas de conceito traçam limites que absolutamente ainda não haviam sido dados. O que deles se pode concluir, não é possível antever; não se tira simplesmente da caixa o que nela se havia posto[76]. (Idem)

A distinção apresentada acima se ajusta com um princípio adotado logo no início dos *Fundamentos*, a ideia de que o fundamento da Aritmética não consiste em nenhum princípio agregacionista ou mecânico, de que o todo de uma proposição é mais, em seu significado, do que a soma de suas partes. Isso significa que novos conhecimentos poderiam ser obtidos das relações entre conceitos e objetos, sujeitos e predicados e na Aritmética. Mas, se é assim, não seriam esses conhecimentos *sintéticos a priori*? Frege não ignora essa hipótese:

> Estas consequências ampliam nosso conhecimento e dever-se-ia, segundo Kant, considerá-las como sintéticas; no entanto, podem ser demonstradas de maneira puramente lógica, sendo pois analíticas. Estão de fato contidas nas definições, mas como a

[75] Wenn man die Begriffe (oder ihre Umfänge) durch Bezirke einer Ebene darstellt, so entspricht dem durch beigeordnete Merkmale definirten Begriffe der Bezirk, welcher allen Bezirken der Merkmale gemeinsam ist; er wird durch Theile von deren Begrenzungen umschlossen. Bei einer solchen Definition handelt es sich also — im Bilde zu sprechen — darum, die schon gegebenen Linien in neuer Weise zur Abgrenzung eines Bezirks zu verwenden. (FREGE, G. Die Grundlagen der Arithmetik, §88).

[76] Die fruchtbareren Begriffsbestimmungen ziehen Grenzlinien, die noch gar nicht gegeben waren. Was sich aus ihnen schliessen lasse, ist nicht von vornherein zu übersehen; man holt dabei nicht einfach aus dem Kasten wieder heraus, was man hinein gelegt hatte (Idem).

> planta na semente, e não como a viga em uma casa. Frequentemente são necessárias várias definições para demonstrar uma proposição, que consequentemente não está contida em nenhuma particular, seguindo-se contudo de todas em conjunto, de maneira puramente lógica. (Idem)

A analiticidade, tal como introduzida aqui, ganha o *status* de potencial, onde todas as conclusões e significados encontram-se presentes nas definições e podem ser demonstrados logicamente, mas em uma relação tal qual à da planta e da semente, de modo que tais conclusões sejam descobertas, e não dadas de maneira mecânica, como na relação de uma viga em uma casa, na qual já sabemos o que encontraremos.

Tal como entendido por Frege, a nova concepção de conceito possibilita que conhecimentos de fontes analíticas contenham todas as características indicadas por Kant, exceto a de serem tautológicos. O papel das definições fecundas em relação ao domínio do enumerável parece-nos relevante ao contexto dos *Fundamentos*, uma vez que o objetivo da concepção do domínio do enumerável era estabelecer um campo no qual fosse possível apresentar juízos analíticos, nos quais o predicado está contido no sujeito, com características ampliativas do conhecimento, como predicados aditados ao sujeito, como ocorre nos juízos sintéticos a *priori*. As definições fecundas seriam a ação de construir esses juízos sem que eles deixem de ser analíticos.[77]

Fundamental para essa abordagem a respeito da analiticidade parece ser o *princípio de contexto* e *o princípio de composicionalidade.* O princípio de contexto é apresentado primeiramente nos *Fundamentos* como critério ao qual os números deveriam ser submetidos para se encontrar seu significado. Assim expressa Frege a respeito:

> Nesta investigação ative-me firmemente aos seguintes princípios: deve-se separar precisamente o psicológico do lógico, o subjetivo do objetivo; deve-se perguntar pelo significado das palavras no contexto da proposição, e não isoladamente; não se deve perder

[77] Essa abordagem fregiana, ainda embrionária no conjunto de 1884, assumiria o formato acabado de sentido e referência a partir de 1892. Frege observa que os sentidos são modos de apresentação da referência, que os mesmos não podem ser plenamente conhecidos e que eles ampliam o conhecimento sobre uma referência, sendo possivelmente aditados, mas ao mesmo tempo sendo sempre pertencentes à ela.

> de vista a distinção entre conceito e objeto[78]. (FREGE, G. Os *Fundamentos da Aritmética*, pg. 204).

Tomada como princípio, seu desdobramento consiste em justificar o significado dos números. Uma vez que os números não podem ser considerados como propriedades do sujeito, enquanto objetos independentes não sensíveis, somente a partir do contexto, dado pelos enunciados, que os números podem ter algum significado.

Conforme Frege:

> O número não pode ser representado nem como objeto independente nem como propriedade em uma coisa exterior, porque não é algo sensível nem propriedade de uma coisa exterior[79]. (Idem, §58).

E ainda:

> A independência que reclamo para o número não deve significar que um numeral designe algo fora do contexto de uma proposição, mas pretendo com isto apenas excluir seu uso como predicado ou atributo, o que alteraria algo em seu significado[80]. (Ibidem, §60).

Se é o princípio de contexto que, por um lado, permite a Frege construir a definição de número e o significado do mesmo, por outro lado, o princípio de composicionalidade parece ser o núcleo, nos *Fundamentos da Aritmética*, da relação de extensionalidade entre conceito e objeto. Afinal, é o percurso de valor entre os objetos que caem sob um conceito que nos permite identificar o valor de verdade pertencente a um conceito. Se,

---

[78] Als Grundsätze habe ich in dieser Untersuchung folgende festgehalten: es ist das Psychologische von dem Logischen, das Subjective von dem Objectiven scharf zu trennen; nach der Bedeutung der Wörter muss im Satzzusammenhange, nicht in ihrer Vereinzelung gefragt werden; der Unterschied zwischen Begriff und Gegenstand ist im Auge zu behalten (FREGE, G. Die Grundgalen der Arithmetik, pg. X).

[79] Die Zahl kann weder als selbständiger Gegenstand noch als Eigenschaft an einem äussern Dinge vorgestellt werden, weil sie weder etwas Sinnliches noch Eigenschaft eines äussern Dinges ist (Idem, §58).

[80] Die Selbständigkeit, die ich für die Zahl in Anspruch nehme, soll nicht bedeuten, dass ein Zahlwort ausser dem Zusammenhange eines Satzes etwas bezeichne, sondern ich will damit nur dessen Gebrauch als Praedicat oder Attribut ausschliessen, wodurch seine Bedeutung etwas verändert wird (FREGE. G. Die Grundlagen der Arithmetik, §60)

ao indagarmos sobre o valor de verdade de uma sentença, precisamos encontrar a referência de cada termo da mesma, então isso corresponde a dizer que o significado de uma sentença é construído a partir de suas partes constitutivas, em um modelo de construção em blocos. Mas, se é assim, como conciliar um princípio que nos leva a procurar o sentido de um termo em seu contexto sentencial e, em contrapartida, encontrar o sentido de uma sentença no significado de suas partes?

Essa aparente tensão interna no logicismo fregiano, no entanto, é o que o distancia da abordagem kantiana referente aos juízos analíticos e sintéticos. Caso Frege utilizasse apenas a extensionalidade, o resultado seria um conjunto de percursos de valores que, no limite, descreveriam inúmeras descrições definidas de conceitos. Entretanto, essas descrições definidas teriam a característica de conceitos coordenados, nos quais apenas moveríamos artificialmente objetos sob conceitos e, se os valores de verdade pudessem ser deduzidos em uma relação de identidade com o sujeito, seriam considerados juízos analíticos e, em contrapartida, se as relações de subsunção criadas entre objetos e conceitos fossem aditadas, não encontradas por decomposição do sujeito dos enunciados criados, então estes seriam considerados juízos sintéticos. Entretanto, a abordagem de Frege, ao conceber o logicismo como assentado em fundamentos distintos dos apontados por Kant, o leva a pressupor uma potencialidade nos termos, que os impede de serem reconhecidos em seus sentidos isoladamente[81]. A construção de uma sentença completa demanda um dinamismo maior, que leva Frege a articular o princípio de contexto em conjunto com a extensionalidade. Se, por um lado, a extensionalidade marca a relação entre um objeto e um conceito ou, em termos

[81] Scruton (1982) ao tentar explicar as duas abordagens de Frege, pode contribuir indiretamente para avançarmos com a questão. O autor comenta, ao falar sobre a fundamentação da Aritmética estabelecida por Frege, sobre os dois princípios:

Particularmente interessantes são estas duas: a de que uma palavra só tem significado definido no contexto de toda uma sentença e a de que o significado de qualquer sentença deve ser derivável dos significados de suas partes. Elas parecem ser contraditórias, mas não são. A primeira (da qual encontramos uma aplicação na definição fregiana contextual de número) diz que o significado de uma palavra não pertence a ela isoladamente, mas consiste em sua potencialidade de contribuir para um "pensamento" completo. (SCRUTON, R. Introdução à Filosofia Moderna, pg. 247).

aritméticos, entre um argumento e uma função, é o princípio de contexto que articula a relação entre objetos/conceitos com a enumerabilidade destes a partir dos enunciados numéricos sobre conceitos. A questão levantada a respeito da potencialidade de uma palavra em contribuir para um pensamento completo remete à potencialidade inerente ao fundamento analítico da Aritmética que apontamos anteriormente. Um reflexo dessa concepção pode ser encontrado na posterior distinção apresentada por Frege sobre dois tipos de pensamentos: os que demandam a circunstância de serem pronunciados para se verificar seu valor de verdade e os que são indiferentes a serem pronunciados para terem seu valor de verdade definidos extensionalmente[82].

Essa questão também desfaz um aparente contrassenso contra Frege, a saber: se o logicismo consiste na identificação das leis da Aritmética com as leis do pensamento, e as toma ambas como de origem analítica, como seria possível conceber novos conhecimentos ou novos resultados na Aritmética? A versão ampliada do conceito de *analítico* exposta nos *Fundamentos* parece responder à questão. Isso se deve ao fato de que, ao desvencilhar-se do comprometimento com a concepção nominativa de Kant em relação aos conhecimentos analíticos e em relação aos conceitos, Frege também se desvinculou da limitação imposta pela ideia de construção dos elementos constitutivos de um conceito ser a única forma de conhecimento analítico sendo, pois, capaz de engendrar conhecimento ampliativo mediante o uso do princípio de contexto na formação de conhecimentos analíticos.

Macfarlane e Linnebo (2003) sugerem que a resposta de Frege é originada de um caminho singular de comprometimento com a lógica em seu aspecto de *generalidade*, em detrimento de seu aspecto *formal*. Esse comprometimento, indicado desde a *Conceitografia,* é necessariamente assumido nos *Fundamentos* como resolução do problema acerca dos números, resolvido com a introdução da enumerabilidade do

[82] Essa relação, denominada de primeiro nível, entre conceitos e objetos, e sua referida relação com conceitos de segundo nível (nos quais se enquadram os números) será abordada com mais detalhes no Capítulo 2.

pensável e pelas relações de segundo nível. Pelo que foi exposto, a abordagem de Frege vai além da simples recusa de atribuição de conhecimentos sintéticos *a priori* no fundamento da Aritmética, mas envolve também a recusa de que a concepção de analítico *a priori* não gera a possibilidade de apreensão das leis do pensamento construtivamente, em um modelo intermediário de conhecimento analítico. Podemos afirmar que, somada à recusa primeira da intuição, Frege contesta, afinal, toda a virada copernicana empreendida por Kant, uma vez que essa virada desloca o eixo do mundo para o sujeito, refletindo, a partir da intuição, para o espaço de subjetividade que, ainda que de forma indireta e não pretendida por Kant, Frege entende que desembocaria em um psicologismo enviesado. A solução de Frege para o problema acarretado pela intuição kantiana, que obrigatoriamente nos levaria a apresentar o espaço e o tempo sobre toda a Aritmética, consistiria em ressignificar os números como algo distinto dos numerais, como objetos atribuídos pelo operador de cardinalidade em relações de segundo nível sobre conceitos de primeiro nível, independentes tanto da experiência quanto da intuição.

Como consequência, Frege consegue desvencilhar-se das abordagens de Mill e Kant, colocando os *Fundamentos da Aritmética* fora da dicotomia transcendental-empiria ao categorizar os números como objetos lógicos. Ao saltar para fora da dicotomia tradicional, Frege pode estabelecer o espaço lógico da razão, no qual se encontra a objetividade tanto dos números quanto dos conceitos, estabelecidos por leis lógicas, leis essas as do pensamento.

1.5 Extensão de Conceitos, Enumerabilidade e Identidade

Para finalizar esse capítulo, faremos apenas mais algumas observações a respeito dos movimentos empreendidos por Frege para fundamentar o logicismo. Geralmente, se atribui aos *Fundamentos da Aritmética* a ideia de que se trata de uma crítica ao empirismo de John Stuart Mill e Immanuel Kant, e que, pela crítica a ambos, Frege estabeleceria o logicismo.

Da mesma forma, o processo inicial do texto, tal como Frege o apresenta, sugere, conforme já abordamos, uma ideia de que Frege atua no mesmo eixo proposicional de Kant, com algumas modificações estruturais. A hipótese que defendemos, no entanto, visa demonstrar que a estrutura dos *Fundamentos da Aritmética* é mais ambiciosa em sua proposta do que apenas apresentar o logicismo de uma maneira mais acessível.

Para isso, voltaremos a alguns pontos do texto fregiano, de modo a reconstituir tais passagens levando em consideração as críticas que já foram apresentadas em referência ao projeto kantiano.

Já falamos a respeito da justificação dos juízos a da necessidade de demonstrabilidade dos mesmos, evidenciada por Frege nos parágrafos iniciais dos *Fundamentos*. Entretanto, gostaríamos agora de enquadrar outro ponto indicado pela leitura do texto. No §5, Frege se indaga se as fórmulas numéricas seriam demonstráveis. E, ao fazer essa indagação, a primeira objeção que é levantada é a de que as fórmulas numéricas, assim como os axiomas, não seriam demonstráveis. A justificativa apresentada é referida por Kant e Hankel, para quem as fórmulas numéricas não seriam demonstráveis por serem infinitas em número.

Existe uma relação construída aqui, tal como Frege sinaliza, que impede uma abordagem diferente acerca das fórmulas numéricas. A relação criada consiste em pensar que as fórmulas são imediatamente evidentes e infinitas em número. Essa abordagem é problemática, pois entende que todas as fórmulas numéricas tratariam de números determinados, imediatamente evidentes e infinitos. Frege pretende dissolver essa conexão entre as fórmulas numéricas com os elementos citados e, para isso, ele inicia o parágrafo 5 indicando a meta pretendida:

> Devem-se distinguir as fórmulas numéricas que, como 2 + 3 = 5, tratam de números determinados, das leis gerais que valem para todos os números[83]. (FREGE. G. Os *Fundamentos da Aritmética*, §5)

[83] Man muss die Zahlformeln, die wie 2 + 3 = 5 von bestimmten Zahlen handeln, von den allgemeinen Gesetzen unterscheiden, die von allen ganzen Zahlen gelten (Idem, §5).

Para atingir esse objetivo, Frege primeiramente questiona a auto-evidência das fórmulas numéricas. Seu argumento, utilizado tanto contra Mill quanto contra Kant, consiste em demonstrar que a auto-evidência das fórmulas numéricas é aparente, ocasionada por exemplos de menor proporção, mas que, quando multiplicados por uma série muito mais extensa, vê dissolvida toda possibilidade de evidência imediata.

Mas a questão não se resume a demonstrar, no mesmo palco que Kant e Mill, que as fórmulas numéricas não são auto-evidentes e que, portanto, necessitam ser demonstradas. Quando Frege diz:

> Considerando-se também a oposição entre analítico e sintético, resultam quatro combinações, uma das quais, porém, a saber,
>
> analítico *a posteriori,*
>
> é impossível. Àqueles que se decidiram com Mill em favor do *a posteriori* não resta pois escolha, restando-nos ponderar ainda somente as possibilidades
>
> sintético *a priori*
>
> e
>
> analítico... (FREGE, G. Idem, §12)[84]

isso não significa que todo o projeto logicista está resumido a realizar uma escolha entre Frege, Mill ou Kant a partir de uma escolha entre os tipos de juízos que cabem

[84] Wenn man den Gegensatz von analytisch und synthetisch hinzunimmt, ergeben sich vier Combinationen,

von denen jedoch eine, nämlich

analytisch a*posteriori*

ausfällt. Wenn man sich mit Mill für a*posteriori* entschieden hat, bleibt also keine Wahl, sodass für uns nur

noch die Möglichkeiten

synthetisch a*priori*

und

analytisch(...) (FREGE, G. Die Grundlagen der Arithmetik, §12).

para as fórmulas numéricas. A questão que deveria estar sendo feita e não foi é, por que as fórmulas numéricas que tratam de leis gerais sobre os números não foram sequer concebidas para a Aritmética?

O motivo já foi enunciado por Frege: porque as fórmulas numéricas seriam imediatamente evidentes, infinitas em número e, ademais, não possuiriam caráter geral e, por isso mesmo, Kant teria evitado caracterizá-las como axiomas. Mas, como Frege demonstra tanto no que diz respeito à hipótese empírica quanto ao recurso da intuição, elas não são imediatamente evidentes. Então, por que essas características continuavam sendo atribuídas às fórmulas numéricas? Observemos que Frege não diz que elas não possuem esse caráter, mas que nem todas possuem esses atributos. Inclusive, Frege insiste que fórmulas numéricas que tratam de leis gerais poderiam representar o infinito, sem que tivéssemos infinitas fórmulas numéricas. Conforme Frege:

> O conjunto infinito dos números reduz-se mediante tais definições ao um e ao aumento em um, e cada uma das infinitas fórmulas numéricas pode ser demonstrada a partir de algumas proposições gerais[85] (FREGE, G. Idem, §6).

De qualquer forma, também não se trata, então, de optar por alegar que é possível desenvolver tais fórmulas gerais, sem maiores reflexões acerca de o porquê proceder dessa forma, pois isso não torna impossível que se continue gerando apenas fórmulas numéricas que tratem de números determinados. O caminho de Leibniz, por exemplo, não impediu Kant de considerar as fórmulas dessa maneira. Se a questão fosse apenas uma escolha entre analítico ou sintético, Frege não estaria numa chave diferente de Leibniz. Mas o fato de Frege citar Leibniz foi precisamente para indicar que ele não estava seguindo o mesmo caminho dele, pelo menos não da mesma forma. E o motivo pelo qual Frege não considerava estar no mesmo eixo que os demais pensadores com os quais ele trava diálogo nesse texto ele mesmo enuncia no §10:

[85] Die unendliche Menge der Zahlen wird durch solche Definitionen auf die Eins und die Vermehrung um eins zurückgeführt, und jede der unendlich vielen Zahlformeln kann aus einigen allgemeinen Sätzen bewiesen warden (Idem, §6).

> Isto não ocorre aqui, por não serem os números espaciais e temporais. As posições na série dos números não equivalem aos lugares do espaço[86]. (FREGE, G. Idem, §10)

Se não são espaciais e nem temporais, portanto os números não podem ser abordados quer pela experiência empírica, quer pela projeção psicológica dessa experiência, quer pela intuição espacial. Ao proceder dessa forma, Frege simplesmente muda o palco onde a discussão ocorre. O que Frege opera ao retirar os números dos lugares no espaço é retirá-los da submissão rígida das instâncias nominativas e semânticas e inseri-los em um novo eixo, o das relações lógicas de segunda ordem, que permite fixar a identidade dos números enquanto objetos, mediante o domínio da enumerabilidade do que é pensável.

As implicações acerca do domínio do enumerável são muitas e muito ramificadas no trabalho de Frege. Inicialmente, o produto mais evidente do domínio do enumerável não são os enunciados diversos que podemos encontrar acerca da Aritmética e tantos outros, mas sim enunciados supervenientes de atribuições de propriedades de conceitos de primeiro nível. Esses enunciados teriam a forma de enunciados substantivados, e que ocorrem em outros níveis de relações entre conceitos e objetos. Isso significa que o produto do domínio do enumerável é toda uma infinitude de enunciados que devem sua existência a todos os demais enunciados pensáveis. As propriedades de conceitos de primeiro nível enunciadas pelas proposições supervenientes são propriedades numéricas, que indicam a cardinalidade dos conceitos de primeiro nível, expressam quantos objetos caem sob esses conceitos e, ao fazer isso, indicam que tais conceitos são instanciados. Por empregar um operador de cardinalidade sobre conceitos de primeiro nível, possuem o mesmo caráter dos quantificadores existenciais. Frege dá um passo além a respeito desses enunciados. Eles possuem uma conexão com os quantificadores existenciais. Para Frege, dizer que nenhum objeto cai sob um conceito é o mesmo que dizer que ele não possui instâncias e, contiguamente, não existe. Em termos de enumerabilidade, o número que convém a

[86] Das fällt hier hinweg, weil die Zahlen raum, und zeitlos sind. Die Stellen in der Zahlenreibe sind nicht gleichwerthig wie die Orte des Raumes (Ibidem, §10).

tais conceitos é sempre zero. Portanto, no logicismo fregiano, o pressuposto para a atribuição existencial de um conceito é ao mesmo convir um número, no domínio do enumerável, diferente de zero. Outra implicação que devemos sempre ter em conta é que Frege está assumindo, como estrutura lógica fundamental do logicismo e da Aritmética, a lógica extensional. O domínio do enumerável é um domínio estrito da lógica extensional. Por isso todo o pensável pode ser analisado formalmente nesse campo lógico de forma analítica.

No que diz respeito às relações de segundo nível, Frege ainda indica como a cardinalidade constrói a relação entre os conceitos e os números como objetos. Primeiramente, temos, no §54:

> De fato, não seria melhor chamar um conceito de unidade com referência ao número que lhe convém? Poderíamos então dar sentido ao que se asserta sobre a unidade, que ela é delimitada em relação ao ambiente e indivisível. Pois o conceito a que o número é atribuído em geral delimita, de maneira determinada, o que sob ele cai[87] (FREGE, G. Idem, §54).

Observamos que essa definição de conceito como unidade com referência ao número que lhe convém apela para uma definição extensional de conceito. Implica dizer que um conceito é uma unidade com referência à propriedade de instâncias que possui, determinadas pelo número que lhe convém. Implica também sobre a delimitação acerca dos objetos que sob ele caem. É importante distinguir aqui que essa abordagem de Frege ocorre tanto no campo da lógica extensional como se define em uma relação de níveis de atribuição. O número que convém a um conceito só é determinante dos objetos que caem sob o conceito (determinante aqui não a respeito de quais objetos caem, no que tange ao significado, mas sim à delimitação de quantos caem) porque sua atribuição se dá mediante um enunciado de segundo nível que atribui uma propriedade cardinal ao conceito de primeiro nível, conforme já demonstrado acima.

[87] In der That, wäre es nicht am passendsten, einen Begriff Einheit zu nennen in Bezug auf die Anzahl, welche ihm zukommt? Wir können dann den Aussagen über die Einheit, dass sie von der Umgebung abgesondert und untheilbar sei, einen Sinn abgewinnen. Denn der Begriff, dem die Zahl beigelegt wird, grenzt im Allgemeinen das unter ihn Fallende in bestimmter Weise ab (Ibidem, §54).

Outro ponto importante a ressaltar é que a definição de números, bem como a identidade dos números, e também a definição que nos permite determinar uma série ocorre sempre a partir desse contexto dado: lógica extensional, domínio do enumerável, relações de segundo nível. Dessa forma, mudando o eixo da discussão, Frege cria o logicismo, mas também reinterpreta as questões antes propostas pelos outros pensadores, e o que parecia inconciliável se torna instrumentalizado e integrativo. E na verdade, segundo Coffa, a divisão rígida promovida por Kant nas instâncias nominativa e semânticas não eram, de fato, articuladas de maneira tão rígida e estrita. Para justificar as proposições sintéticas *a priori*, Coffa afirma que Kant utilizaria das duas instâncias sobre o juízo sintético:

> Assim, usando sua definição nominal, Kant não teve dificuldade em identificar juízos sintéticos *a priori*. De fato, as únicas considerações a serem encontradas nos escritos de Kant que se assemelham a argumentos para a existência de juízos sintéticos *a priori* invariavelmente apelam para a versão nominal da distinção de Kant - argumentando, muito plausivelmente, que este ou aquele predicado-conceito é "obviamente" não constituinte ou não "pensado" neste ou naquele sujeito-conceito[88]. (Coffa, J.A. idem, pg. 18)

Portanto, essa abertura para cima, como poderíamos chamar a abordagem de Frege, não deixa de ser uma crítica diferente de sua parte em relação às críticas do período, uma vez que ela é ampliativa do pensamento kantiano, de certa forma. A partir dela, Frege consegue justificar os números de uma forma distinta e não espacial, como ele mesmo enuncia, e da mesma forma, culmina por demonstrar o infinito pelo mesmo método.

Poderíamos dizer que Frege não ataca todo o pensamento kantiano. E não o faz porque ele aceita os elementos constitutivos desse pensamento. Ele aceita as definições e a terminologia sobre o juízo analítico e sintético e sobre os conhecimentos

---

[88] Thus, using his nominal definition, Kant had no difficulty identifying synthetic a priori judgements. Indeed, the only considerations to be found in Kant´s writings that resemble arguments for the existence of synthetic a priori judgements invariably appeal to the nominal version of Kant´s distinction – arguing, quite plausibly, that this or that predicate concept is "obviously" not a constituent or not "thought in" this or that subject concept (Coffa, J. A. idem, pg. 18).

a priori e *a posteriori*. Frege amplia a teoria kantiana dos juízos analíticos, e é nesse processo ampliativo que ele encontrará uma posição contrária a Kant. Frege não aceita a intuição, e é contra ela que ele direciona a maioria de seus argumentos. Mas, se Frege procede dessa forma, isso se dá por um motivo muito específico. A concepção de que os juízos analíticos possuem algo que vai além da definição kantiana, tornando possível novos pensamentos a partir de tais juízos, sem que os mesmos deixem de ser analíticos, exige que Frege combata a ideia de que todo pensamento novo necessite do uso da intuição. Se a concepção kantiana for atendida por Frege, ela nublará a existência de juízos analíticos que trazem novos conhecimentos, pois, ao pressupor que a intuição estaria envolvida e que, nesse caso, o conhecimento teria de ser sintético, inviabilizaria toda a extensão de conhecimentos analíticos pretendida por Frege. Portanto, a intuição não poderia estar envolvida em todo conhecimento novo. E é notório que essa abertura promovida por Frege norteará toda a dedução de número defendida nos *Fundamentos da Aritmética*. Não é o caso de superlativizarmos essa abordagem ao ponto de dizer que Frege desenvolveu uma lógica da infinitude no seio do logicismo, mas é possível que Frege tenha construído uma lógica orientada para a infinitude como elemento constitutivo do logicismo. A seguir, analisaremos como a concepção logicista do infinito gradativamente se tornará um problema insolúvel para Frege no contexto das soluções basilares que fundamentam o logicismo.

Capítulo 2 – Consequências do Domínio do Enumerável no Desenvolvimento do Logicismo

2.1 O problema do Infinito

Até o presente momento, percorremos um itinerário que visou demonstrar como Frege fundamentou não apenas a Aritmética, mas também o logicismo e a filosofia analítica.

O debate até então se deslocava de um status de ‘uso naturalista’ da Aritmética, exemplificada por John Stuart Mill, para um status de ‘uso psicologista’, expresso pela abordagem intuicionista da concepção sintético *a priori* atribuída por Immanuel Kant à Aritmética. Os desdobramentos dessas abordagens resultavam em concepções contraditórias e insuficientes para representar todas as relações Aritméticas.

Nesse sentido, que poderíamos chamar de abordagem horizontal do problema, Frege apresenta uma proposta diferente, uma abordagem vertical ao problema, a da enumerabilidade do pensável que, em sua aplicação, elimina as contradições e dicotomias encontradas nas abordagens tradicionais, na medida em que inclui as contradições anteriores em um novo conjunto de princípios norteadores, ao acrescentar uma “camada” de relações de segunda ordem (estas extensionais analíticas) às relações de primeiro nível presentes nos enunciados.

A seguir, analisaremos as implicações dessa abordagem e como a infinitude se revela, a partir da coextensividade entre as leis da Aritmética e as leis do pensamento e da generalidade do conceito, promovendo uma abertura indefinida tanto na extensão da função quanto na extensão dos conceitos, abertura essa que se desdobra em um *continuum* de criação de pensamentos intemporais. Acreditamos que esse *continuum* cada vez mais passa a pressionar a concepção do logicismo de Frege, no sentido de considerar toda essa extensionalidade no núcleo da fonte analítica do conhecimento.

Para isso, iremos analisar de forma mais detida os instrumentos operatórios resultantes da enumerabilidade do pensável e como esses elementos impactarão o desenvolvimento do logicismo. Primeiramente, veremos como, nos próprios *Fundamentos da Aritmética*, Frege constrói o conceito de infinito a partir da enumerabilidade do pensável. Em seguida, veremos, no contexto da Aritmética, que o infinito desenvolvido por Frege se constitui em uma concepção lógica distinta da concepção matemática, exemplificada por Cantor. Em consequência, prosseguiremos analisando como a Aritmética, sendo concebida como conceitos de segundo nível, tece uma lógica de relações com as sentenças e pensamentos. Por fim, já na transição da Aritmética para a lógica, investigaremos a necessidade de se fundamentar axiomaticamente a generalidade de identidade da extensionalidade oriunda da infinitude como conceito de segundo nível, o que acarretará na Lei Básica V, presente nas *Leis Básicas da Aritmética* (1893-1903), e que, mediante o paradoxo de Russell, mostra-se impossível, demonstrando que o logicismo fregiano, não é apenas inconsistente, mas dotado de incompletude.

A enumerabilidade do pensável, vale dizer, é concebida por Frege não apenas como um vetor ou um eixo que permite abordarmos o pensamento em um sentido mais ampliativo do que as concepções indutivas ou psicologistas, mas como um *domínio*[89]. O domínio do enumerável, como Frege o aborda, possui características que serão desenvolvidas ao longo dos Fundamentos, cujos desdobramentos conceituais são determinantes para a formação do logicismo fregiano. Primeiramente, o domínio do enumerável não consiste em um domínio psicológico, tampouco um domínio de identidades lógicas, subjetivas ou abstrações[90]. A respeito desse domínio do enumerável, vale contextualizar como ele interage com outras instâncias relevantes dos *Fundamentos da Aritmética*. O domínio do enumerável, como vimos anteriormente, é

[89] Vide o §14, dos *Fundamentos da Aritmética*, já referido no Capítulo 1. No original alemão: Die arithmetischen Wahrheiten beherrschen das Gebiet des Zählbaren.

[90] Vide § 15 e 16, 25 e 26, dos *Fundamentos da Aritmética*.

considerado por Frege o mais inclusivo, pois inclui todo o pensável. Esse domínio, portanto, engloba outro campo de enunciados: o domínio *objetivo não-efetivo*, que é fundamental para Frege, no sentido de que é esse campo que permite a existência do pensamento enquanto fato independente do campo subjetivo sem, no entanto, ter de se comprometer com uma efetividade, no sentido de possuir implicações aos nossos sentidos.

A objetividade pode ser entendida como o espaço de independência dos objetos do mundo em relação aos diversos aspectos da atividade psicológica humana. Como Frege afirma:

> Assim, entendo por objetividade uma independência com respeito a nosso sentir, intuir, representar, ao traçado de imagens internas a partir de lembranças de sensações anteriores, mas não uma independência com respeito à razão; pois responder à questão do que são as coisas independentemente da razão significa julgar sem julgar, lavar-se e não se molhar[91]. (Idem, §26)

Essa independência, embora esteja circunscrita ao campo da razão, não acarreta subjetividade, pois não se encontra no campo psicológico. Na verdade, Frege constitui uma instância na qual as leis, as concepções lógicas, os juízos, todos os pensamentos que possuem inteligibilidade e sejam passíveis de valor de verdade ao longo do tempo, existem e mantêm estabelecido um conjunto de relações que não podem ser quebradas por nossa subjetividade, nem por qualquer âmbito de discurso privado. Embora possuam relação com a objetividade efetiva, sensível e concreta, a mesma não implica essa objetividade sensível, sendo, inclusive, independente dela, conforme Frege afirma:

> Distingo o objetivo do palpável, espacial e efetivamente real. O eixo da Terra e o centro de massa do sistema solar são objetivos,

[91] So verstehe ich unter Objectivität eine Unabhängigkeit von unserm Empfinden, Anschauen und Vorstellen, von dem Entwerfen innerer Bilder aus den Erinnerungen früherer Empfindungen, aber nicht eine Unabhängigkeit von der Vernunft; denn die Frage beantworten, was die Dinge unabhängig von der Vernunft sind, hiesse urtheilen, ohne zu urtheilen, den Pelz waschen, ohne ihn nass zu machen (Idem, §26).

> mas preferiria não chamá-los de efetivamente reais como a própria Terra (Ibidem, §26[92]).

Dessa forma, entendemos que Frege estabelece toda uma região de objetividade no qual os elementos da lógica que caracterizam todo o pensável podem existir; um espaço de razão no qual o pensável, bem como suas correlações, ocorre independente dos elementos objetivos e fatos sensíveis e efetivos[93]. Sua independência decorre, inclusive, do fato de que ele não se encontra em nenhuma instância temporal ou espacial. Esse domínio de objetividade não-efetiva é de tamanha relevância como espaço primordial no qual as leis lógicas do pensamento podem se desenvolver que mesmo as *Leis Básicas da Aritmética*, de 1906, o tomam por base de todo seu desenvolvimento. De acordo com Frege, no *Prólogo* à referida obra:

> [...] eu reconheço um domínio do objetivo não-efetivo (Objectiven Nichtwirklichen), enquanto que os lógicos psicologistas consideram o não-efetivo como o subjetivo (Subjectiv) sem mais. E, obviamente, não se vê claramente por que aquilo que tem uma existência (Bestand) independente do emissor de juízos deva ser efetivo, isto é, deva poder atuar diretamente ou indiretamente sobre os sentidos [94] (FREGE, G. Prólogo às *Leis Básicas da Aritmética*, pg. 08).

---

[92] Ich unterscheide das Objective von dem Handgreiflichen, Räumlichen, Wirklichen. Die Erdaxe, der Massenmittelpunkt des Sonnensystems sind objectiv, aber ich möchte sie nicht wirklich nennen, wie die Erde selbst (Ibidem).

[93] No §61 dos *Fundamentos da Aritmética*, Frege reforça a distinção entre o subjetivo, objetivo efetivo e o objetivo não-efetivo: No entanto, mesmo que o subjetivo não esteja em lugar nenhum, como é possível que o 4 objetivo não esteja em lugar nenhum? Ora, afirmo não haver aí absolutamente nenhuma contradição. Ele é de fato precisamente o mesmo para todos que com ele se ocupam; mas isto nada tem a ver com a espacialidade. Nem todo objeto *objetivo* está em algum lugar. Do original: Aber wenn auch das Subjective keinen Ort hat, wie ist es möglich, dass die objective Zahl 4 nirgendwo sei? Nun ich behaupte, dass darin gar kein Widerspruch liegt. Sie ist in der That genau dieselbe für jeden, der sich mit ihr beschäftigt; aber dies hat mit Räumlichkeit nichts zu schaffen. Nicht jeder objective Gegenstand hat einen Ort.

[94] Wir können das noch allgemeiner fassen: ich erkenne ein Gebiet des Objectiven, Nichtwirklichen an, während die psychologischen Logiker das Nichtwirkliche ohne weiteres für subjectiv halten. Und doch ist gar nicht einzusehen, warum das, was einen vom Urtheilenden unabhängigen Bestand hat, wirklich sein, d. h. doch wohl fähig sein müsse, unmittelbar oder mittelbar auf die Sinne zu wirken (Grundgesetze der Arithmethic, pg. XVIII).

Não é de se surpreender que esse espaço concebido por Frege em 1884 irá se desdobrar no que ele nomeará de *3º Reino,* no artigo de 1918, *O Pensamento*[95].

É nesse contexto de domínio lógico não espacial e temporal desenvolvido por Frege que se localiza o domínio ou território do enumerável. A abordagem empreendida por Frege ao conceber o domínio do enumerável e, consequentemente, inserir nesse domínio todo o pensável, cria um precedente muito mais amplo do que as tentativas do período de fundamentar a Aritmética na lógica ou o inverso, isto é, *matematizar* a lógica. O que Frege constitui com essa abordagem é um amálgama entre Aritmética e Lógica, como um todo regulatório e organizador do pensamento. Da parte da lógica, esta se torna regulatória da forma do pensamento, na medida em que determina a estrutura formal a que todo pensamento deve se adequar para ser enunciado, estrutura essa fundamentada sobre os parâmetros da saturação, da completude do pensamento a partir da extensionalidade atribuída ao conceito. Da Aritmética, os números assumem o status de objetos, que podem ser empregados para se enunciar propriedades cardinais das extensões de conceitos nas relações de segundo nível, sendo, no limite, reguladores dos próprios conceitos que formam o pensamento. De um lado, a Aritmética continua evidenciando todo seu campo operatório na Matemática, mas agora guarda uma natureza lógica que articula todo o pensável, incluindo as próprias leis do pensamento e dos números, leis essas, afinal, expressas também como pensamento ordenante[96].

Esse *status* é paulatinamente construído nos *Fundamentos*. A partir do §21, Frege investiga a possível natureza do número como propriedade de coisas exteriores. É nesse contexto que ele esbarra na impossibilidade dessa afirmação, uma vez que isso

---

[95] Mais detalhes sobre o 3º Reino e sua conexão com os *Fundamentos da Aritmética*, podem ser vistos ainda nesse capítulo.

[96] A esse respeito, demonstraremos pouco mais adiante como Frege mobiliza os números de maneira a serem empregados em enunciados ordenantes das relações entre outros conceitos com seus objetos.

acarretaria em conjuntos de aglomeração ou de agregados, o que cria sempre um conjunto de complicações. Dessa forma, por exemplo, o número 1, ao se tornar propriedade de objetos, deveria apresentar distinguibilidade entre os mesmos. Isso implicaria ter de utilizar indicações como 1'+1''+1''', caso quiséssemos correlacionar esses objetos mediante sua propriedade numérica. Mas, diante desse quadro, qual poderia ser o resultado de tal soma? Essas dificuldades o levam a indagar se os números seriam produto da subjetividade. O campo da subjetividade, no entanto, pouco contribuiria para resolver a questão, uma vez que novamente recairíamos na ideia de que cada representação numérica seria distinta de todas as demais, de maneira que um número *2* nunca teria assegurado ser igual à representação de outro número *2*. Reconhecendo, assim, a necessidade de haver a objetividade dos números em relação às representações, o mesmo problema é transposto nos parágrafos seguintes para o contexto da unidade como propriedade de objetos. O resultado implicaria novamente em agregados de 'uns' se sobrepondo a outros[97].

Pelo argumento de Frege, por mais que se busque reduzir as definições de um enunciado às suas estruturas mais básicas, não se chegará a uma unidade como elemento básico. Frege menciona, como exemplo, a tentativa de decompor o conceito de Lua até chegarmos à propriedade *um*. Por mais que se tente, não se chega ao numeral. A justificativa de Frege é que o número 1 não é um conceito para que o objeto Lua venha a cair sob ele[98]. Em outras palavras, não existe conexão lógica entre quaisquer objetos e os números, de modo que não podemos tomá-los por propriedades dos objetos. Excluída a possibilidade dos números serem conceitos e também de serem propriedades dos objetos, Frege desloca os números para a posição de indicações na forma de enunciados sobre conceitos. Conforme Frege:

[97]O argumento completo de Frege pode ser visto do §21 ao 36, dos *Fundamentos da Aritmética*.

[98] Vide §44, para mais detalhes.

> Impõe-se assim, como resposta à primeira questão do parágrafo anterior, que a indicação numérica contém um enunciado sobre um conceito[99]. (FREGE, G. Op. Cit., §46)

Esse deslocamento é o que distingue uma relação de conceitos de primeiro nível e de segundo nível. Pela definição fregiana, quando estamos em uma relação de primeiro nível, sob um conceito insaturado cai um conjunto de objetos. Entretanto, quando a relação é entre dois conceitos, então um conceito de primeiro nível *cai em* um conceito de segundo nível. Todo enunciado numérico é, nesse sentido, um enunciado sobre um conceito de primeiro nível. Por exemplo, 'Se digo: "Vênus tem 0 (zero) luas", não há absolutamente nenhuma lua ou agregado de luas sobre o que algo se pudesse enunciar; mas ao conceito "lua de Vênus" atribui-se deste modo uma propriedade, a saber, a de não subsumir nenhum objeto.' (Idem, §46). Portanto, quando se pergunta o número de luas de Vênus, o número em si nem é o conceito (de primeiro nível) e tampouco é o objeto que cai (ou não) sob o conceito, mas sim a indicação da extensão desse conceito.

Nesse sentido, Frege afirma, no §57:

> Indica-o o fato de ser possível dizer: "o número de luas de Júpiter é o quatro", ou "é o número 4". Aqui "é" tem o sentido de "é igual a", "é o mesmo que"[100]. (Idem)

Frege, ao definir o número 4, utiliza o artigo definido "o", que é próprio para identificar um termo objeto, e não um conceito (que recebe o artigo indefinido, como um, uma). Esse uso é para indicar que o número 4 não é um termo conceitual sob o qual caem objetos. O número 4 é único, pois é um objeto. E as instâncias de extensões de objetos que caem sob o conceito número de luas de Júpiter, por estarem unidos em suas características em comum, são iguais ao número 4, eles não *caem sob* o número 4.

---

[99] Damit wird uns als Antwort auf die erste Frage des vorigen Paragraphen nahe gelegt, dass die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthalte (Idem, §46).

[100] Das zeigt sich darin, dass man sagen kann: Adie Zahl der Jupitersmonde ist die vier" oder „ist die Zahl 4". Hier hat „ist" den Sinn von „ist gleich," „ist dasselbe wie" (Idem, §57).

De acordo com Frege:

> Temos, portanto, uma equação que asserta que a expressão "o número de luas de Júpiter" designa o mesmo objeto que a palavra "quatro". E a forma da equação é a predominante em Aritmética. Não se opõe a esta concepção que a palavra "quatro" não contenha nada a respeito de Júpiter ou lua[101]. (Idem)

Frege utiliza dois termos que causam dificuldade de tradução tanto para o inglês quanto para a língua portuguesa: os termos *Zahl* e *Anzahl*. Os dois termos podem ser atribuídos para número mas, de acordo com uma nota à edição brasileira dos *Fundamentos*[102], *Anzahl* é utilizado no sentido de quantificar uma sentença, no caso o conceito de primeiro nível. *Zahl* é o número em geral, o número enquanto objeto que cai como argumento em uma função. Portanto, passa a existir um duplo contexto, no qual o objeto *Zahl* é parte integrante do predicado *Anzahl*. Frege mantém essa mesma nomenclatura nas *Leis Básicas da Aritmética*, de 1893-1903[103]. É o Número, no sentido de *Anzahl,* que é empregado nos enunciados que expressam a cardinalidade de extensões de conceitos, enumerando todo o pensável.

Os números são objetos. Entretanto, eles podem fazer parte de enunciados de propriedades de conceitos de primeiro nível. Nesse caso, existe um movimento

---

[101] Wir haben also eine Gleichung, die behauptet, dass der Ausdruck „die Zahl der Jupitersmonde“ denselben Gegenstand bezeichne wie das Wort „vier.“ Und die Form der Gleichung ist die herrschende in der Arithmetik. Gegen diese Auffassung streitet nicht, dass in dem Worte „vier“ nichts von Jupiter oder von Mond enthalten ist (Idem).

[102] A nota de Luis Henrique dos Santos, na íntegra: “Número” aqui traduz *Anzahl*. O par *Zahl-Anzahl* implica dificuldades insuperáveis de tradução. *Zahl* significa número em geral, enquanto *Anzahl* significa número em conexão com a operação de contar. Para Frege são *Zahlen* todos os números de todas as espécies (inteiros e fracionários, positivos e negativos, racionais e irracionais, reais e complexos), mas são *Anzahlen* apenas os que respondem à questão "Quantos?", os que chamamos de cardinais. Apesar disto, emprega quase sempre os dois termos indiferentemente, o que nos levará também a traduzi-los indiferentemente por "número", a menos que o contexto particular imponha que se acentue a distinção; neste caso traduziremos *Anzahl* por "número cardinal", sem deixar de reconhecer a artificialidade da solução. (Os *Fundamentos da Aritmética*, §2, nota 06).

[103] O tradutor Montgomery Furth, na edição em inglês das *Leis Básicas da Aritmética*, comenta sobre o emprego dos termos: Anzahl (Number) is the cardinality of the extension of a concept; Zahl (number) is real number. (Vide Basic Laws of Arithmetic, pg. LV).

extremamente importante tomado por Frege nos *Fundamentos da Aritmética*. De acordo com Frege:

> Por propriedades que se enunciam de um conceito entendo naturalmente não as notas características que compõem o conceito. Estas são propriedades das coisas que caem sob o conceito, não do conceito[104] (Idem, §53).

Por essa passagem, entendemos que há uma distinção entre propriedade enunciada de um conceito, notas características que compõem um conceito e propriedades de um objeto. As notas características de um conceito tornam-se propriedades de todo objeto que cai sob um conceito. Portanto, a nota de um conceito influencia a relação de primeiro nível entre um objeto e um conceito. Já a propriedade enunciada de um conceito diz respeito a um enunciado que descreve uma propriedade de um conceito de primeiro nível. No exemplo dado por Frege, ela determinará a cardinalidade de um conceito:

> Assim, retângulo não é uma propriedade do conceito "triângulo retângulo"; mas a proposição de que não existe triângulo retângulo retilíneo equilátero enuncia uma propriedade do conceito "triângulo retângulo retilíneo equilátero"; ela atribui-lhe o número zero[105] (Idem).

No exemplo acima, retângulo é uma nota característica do conceito triângulo retângulo, sendo, portanto, propriedade de qualquer objeto que caia sob esse conceito. Em contrapartida, no segundo exemplo, a proposição de que não existe triângulo retângulo retilíneo equilátero enuncia uma propriedade do conceito, e não dos objetos que caem sob ele (no caso, nenhum). E a propriedade, nesse caso, é correspondência entre o número zero e a extensão do conceito. A expressão que Frege utilizará para todos os enunciados de propriedade de conceitos será: *o número que convém ao conceito F,*

---

[104] Unter Eigenschaften, die von einem Begriffe ausgesagt werden, verstehe ich, natürlich nicht die Merkmale, die den Begriff zusammensetzen. Diese sind Eigenschaften der Dinge, die unter den Begriff fallen, nicht des Begriffes (Idem, §53).

[105] So ist „rechtwinklig" nicht eine Eigenschaft des Begriffes „rechtwinkliges Dreieck"; aber der Satz, dass es kein rechtwinkliges, geradliniges, gleichseitiges Dreieck gebe, spricht eine Eigenschaft des Begriffes „rechtwinkliges, geradliniges, gleichseitiges Dreieck" aus; diesem wird die Nullzahl beigelegt (Idem).

que pode ser expressa de forma genérica pelo operador de cardinalidade *Nx:φx.* Zero, nesse caso, não será o objeto direto que cai sob o conceito triângulo retângulo retilíneo equilátero, mas sim um objeto inserido em uma propriedade de segundo nível que determina que nenhum objeto cai sob esse conceito.

Uma vez que se trata de uma propriedade enunciada de conceito, que determina o modo como o conceito se relaciona com os objetos, no que tange à cardinalidade de sua extensão, essa atribuição é analítica, assim como a atribuição de segundo nível relativa à existência. Como já referenciado no Capítulo anterior, ela diz respeito a uma propriedade permanente, intemporal, do conceito, e não diz respeito à possível estrutura material dos objetos que caem sob esse conceito. De outra forma teríamos, como consequência da abordagem a *posteriori* de Mill, de investigar todas as formas triangulares da experiência empírica para, somente ao final, indutivamente, constatar que zero deve ser definido como uma propriedade do conceito triângulo retângulo retilíneo equilátero. Frege reforça esse ponto:

> Também seria falso negar que a existência e a unicidade pudessem, em alguns casos, ser notas características de conceitos. Elas apenas não são notas dos conceitos a que poderiam ser atribuídas conforme sugestão da linguagem. Por exemplo, se todos os conceitos sob os quais cai um único objeto forem reunidos sob um conceito, a unicidade será nota característica deste conceito. Cairia sob ele, por exemplo, o conceito "lua da terra", mas não o corpo celeste assim chamado. Pode-se pois fazer um conceito cair sob outro superior ou, por assim dizer, sob um conceito de segunda ordem. Não se deve, porém, confundir esta relação com a de subordinação[106] (Idem, § 53).

[106] Es wäre auch falsch zu leugnen, dass Existenz und Einzigkeit jemals Merkmale von Begriffen sein könnten. Sie ind nur nicht Merkmale der Begriffe, denen man sie der Sprache folgend zuschreiben möchte. Wenn man z. B. alle Begriffe, unter welche nur Ein Gegenstand fällt, unter einen Begriff sammelt, so ist die Einzigkeit Merkmal dieses Begriffes. Unter ihn würde z. B. der Begriff „Erdmond," aber nicht der sogenannte Himmelskörper fallen. So kann man einen Begriff unter einen höhern, so zu sagen einen Begriff zweiter Ordnung fallen lassen. Dies Verhältniss ist aber nicht mit dem der Unterordnung zu verwechseln (Ibidem).

O exemplo dado por Frege deixa claro que os objetos reais, mesmo os empíricos, que se enquadram em um conceito, não são o foco de uma relação de subsunção entre um conceito de primeiro nível em um conceito de segundo nível. Assim como a existência, a enumerabilidade enquanto propriedade de um conceito não se preocupa com o corpo celeste que chamamos lua da terra. Ele se preocupa com o conceito *lua da terra*, que cai em um conceito mais amplo de segundo nível, onde a unicidade, ou o número um, será a propriedade. E note-se que, nesse conceito maior, o número um não é propriedade, mas nota característica.

Tendo, dessa forma, estabelecido esses pontos, Frege passa a empregar o parâmetro da cardinalidade para construir a definição dos números. Abaixo, temos a primeira tentativa de Frege de definir o número zero: *Parece natural definir: a um conceito convém o número O se nenhum objeto cai sob ele (Fundamentos da Aritmética, §55).* Essa definição é em seguida reformulada:

> (...) a um conceito convém o número O se vale universalmente, para qualquer *a*, a proposição de que *a* não cai sob este conceito.
> Poder-se-ia dizer analogamente: a um conceito F convém o número 1 se não vale universalmente, para qualquer *a*, a proposição de que *a* não cai sob F, e se das proposições "*a* cai sob F" e "*b* cai sob F" segue-se universalmente que *a* e *b* são o mesmo[107]. (Idem, §55)

Todas as demais definições dadas para os números ocorrem dentro desse contexto e definem a finitude de cada número, sua distinção para com os demais e o caráter de série, e não de sucessão. A esse respeito, Haddock afirma:

> Frege concebe a atribuição de existência - como ele faz com atribuições numéricas - como uma predicação de segundo nível. Asserir a existência de alguma coisa não é nada mais do que

[107] (...) einem Begriffe kommt die Zahl 0 zu, wenn allgemein, was auch a sei, der Satz gilt, dass a nicht unter diesen Begriff falle. In ähnlicher Weise könnte man sagen: einem Begriffe F kommt die Zahl 1 zu, wenn nicht allgemein, was auch a sei, der Satz gilt, dass a nicht unter F falle, und wenn aus den Sätzen

„a fällt unter F“ und „b fällt unter F“

allgemein folgt, dass a und b dasselbe sind (Idem, §55).

> negar a atribuição do número 0 a um conceito[108]. (HADDOCK, G. E. A Critical Introduction to the Philosophy of Gottlob Frege, pg. 38).

Não apenas enumerar os pensamentos, o domínio do enumerável é determinante sobre o modo de *existência* de cada conceito. Esse modo, de acordo com Frege, implica na determinação da existência de um conceito a partir de suas instâncias. Um pensamento, caracterizado por seu próprio enunciado, só existe enquanto for enumerável.

Percebe-se que a construção fregiana que estamos apresentando torna necessária a passagem do conceito para sua extensão no sentido de encontrarmos a identidade dos conceitos em sua relação com os conceitos de segundo nível. Essa relação, que Frege toma de empréstimo de Hume e Leibniz[109], é denominada relação biunívoca entre dois conceitos e demonstra sua colinearidade.

Porém, se a propriedade dos conceitos é dada mediante a colinearidade com a definição dos números, temos que cada percurso de valor que corresponde a cada pensamento possuirá colinearidade biunívoca com a Aritmética. Isso valerá tanto para cada número finito como também para o infinito. No que diz respeito ao infinito, Frege o deduz como consequência do conceito *seguir uma série x*. Ao estabelecer o princípio de seguir uma série e definir números finitos, Frege estabelece a seguinte relação:

> A proposição
>
> “se todo objeto com que *x* mantém a relação φ cai sob o conceito F e se, em geral, para qualquer *d*, caso *d* caia sob o conceito F, todo objeto com que *d* mantém a relação φ cai sob o conceito F, então *y* cai sob o conceito F, qualquer que seja o conceito F"
>
> significa o mesmo que
>
> "y segue após x na série-φ"

[108] Frege conceives the attribution of existence – as he does with numerical attributions – as a second order predication. To assert the existence of something is nothing other than to deny the attribution of the number 0 to a concept (HADDOCK, G. E. A Critical Introduction to the Philosophy of Gottlob Frege, pg. 38).

[109] Conforme vemos nos parágrafos 63 a 65 dos *Fundamentos da Aritmética*.

e que

"x precede a y na série-φ "[110]. (FREGE, G. *Fundamentos da Aritmética*, §79).

Tendo construído, dessa forma, os elementos pertinentes ao princípio de *seguir uma* série, que implica a série de números naturais definida axiomaticamente no contexto do domínio objetivo não-efetivo e, portanto, independentes das formas puras da intuição sensível (espaço e tempo), temos que essa mesma definição, em observações feitas pelo autor, resultaria em uma série que, por definição, não poderia ter fim:

> Cabe agora mostrar que — sob uma condição a ser ainda indicada — o número que convém ao conceito "pertence à série natural dos números que termina em *n*" segue na série natural dos números imediatamente após *n*. Demonstra-se com isto haver um número que segue na série natural dos números imediatamente após *n*, não haver um último membro desta série. Esta proposição claramente não pode ser fundamentada por vias empíricas ou por indução[111]. (Idem, §82).

Não haver um último membro dessa série implica que a mesma não possui um limite estabelecido por definição, mas que também cada número nessa série é finito. Dada essa condição, Frege procede para o desenvolvimento da definição de infinito. Para ele, enquanto uma propriedade dos números finitos é que eles nunca podem prosseguir a partir de si mesmos, apenas a partir de outros que os antecedem, a propriedade que caracteriza o infinito seria a de prosseguir a partir de si mesmo. Segundo Frege:

---

[110] Der Satz

„wenn jeder Gegenstand, zu dem x in der Beziehung φ steht, unter den Begriff F fällt, und wenn daraus, dass d unter den Begriff F fällt, allgemein, was auch d sei, folgt, dass jeder Gegenstand, zu dem d in der Beziehung φ steht, unter den Begriff F falle, so fällt y unter den Begriff F, was auch F für ein Begriff sein möge“ sei gleichbedeutend mit „y folgt in der φ - Reihe auf x“ und mit „x geht in der φ - Reihe dem y vorher.“ (Idem, §79).

[111] Es ist nun zu zeigen, dass — unter einer noch anzugebenden Bedingung — die Anzahl, welche dem Begriffe „der mit n endenden natürlichen Zahlenreihe angehörend“ zukommt, auf n in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar folgt. Und damit ist dann bewiesen, dass es eine Anzahl giebt, welche auf n in der natürlichen Zahlenreibe unmittelbar folgt, dass es kein letztes Glied dieser Reihe giebt. Offenbar kann dieser Satz auf empirischen Wege oder durch Induction nicht begründet warden (Idem, §82).

> Aos números finitos opõem-se os infinitos. O número que convém ao conceito "número finito" é infinito. Designemo-lo, digamos, por ∞_1. Se ele fosse finito, não poderia seguir após si próprio na série natural dos números. Pode-se porém mostrar que ∞_1 o faz[112]. (Ibidem, §84).

A partir desse ponto, Frege aborda a concepção de Cantor para definição de infinito a partir da própria Aritmética. Estenderemos um pouco a análise dessa abordagem, pois ela evidencia a distinção entre o tratamento que o logicismo passa a atribuir aos números e sua operação na Aritmética em contraste com a abordagem de Cantor que, conforme indicaremos, mantém a continuidade das concepções clássicas. Embora, na presente situação Frege se valha da concepção básica de Cantor, ele o censura por ainda recorrer à intuição para apreender ao conceito de infinito. Frege, em contrapartida, acredita poder fazê-lo dedutivamente, pela forma como já mencionamos[113].

A abordagem de Frege não se distingue apenas no que diz respeito ao uso que Cantor faz da intuição. Tait (1993) aponta algumas ocasiões nas quais Frege discorda abertamente de Cantor e sugere os motivos para isso. Cantor foi um leitor dos *Fundamentos da Aritmética* de Frege. Posteriormente, Cantor reformularia o conceito de equipolência de conjuntos, que faz Frege se expressar da seguinte forma:

[112] Den endlichen gegenüber stehen die unendlichen Anzahlen. Die Anzahl, welche dem Begriffe „endliche Anzahl“ zukommt, ist eine unendliche. Bezeichnen wir sie etwa durch ∞1 ! Wäre sie eine endliche, so könnte sie nicht auf sich selber in der natürlichen Zahlenreihe folgen. Man kann aber zeigen, dass ∞1 das thut (Idem, §84).

[113] De acordo com Frege: § 86. Para obter os números infinitos, Cantor introduz o conceito relacional de seguir em uma sucessão, que diverge do meu "seguir em uma série". Segundo ele, surgiria uma sucessão, por exemplo, se os números finitos positivos inteiros fossem ordenados de tal modo que os ímpares, tomados à parte, seguissem um após outro em sua sequência natural, o mesmo ocorrendo com os pares, estipulando-se, além disto, que cada par seguisse após cada ímpar. Nesta sucessão O, por exemplo, seguiria após 13. Nenhum número, porém, precederia imediatamente a O. Ora, trata-se de um caso que nunca poderia ocorrer segundo minha definição de seguir em uma série. Pode-se demonstrar rigorosamente, sem utilizar nenhum axioma da intuição, que se y segue na série-φ após x, há um objeto que nesta série precede imediatamente a y. Parecem-me faltar ainda definições precisas de seguir em uma sucessão e do número cantoriano. Cantor recorre então a uma "intuição interna" um tanto misteriosa, onde deveria esforçar-se por obter uma demonstração a partir de definições, o que seria de fato possível. Pois acredito antever como estes conceitos poderiam ser determinados. (Idem, §86).

> Agora vejo que as verdades que enunciei em meu livro não eram, afinal de contas, como moedas caídas na rua, que qualquer um poderia fazer suas simplesmente curvando-se. O Senhor Cantor passa a dar algumas outras definições (pp. 23 e 56) que mostram que ele ainda está firmemente abrigado em uma posição antiquada. Ele está pedindo por abstrações impossíveis e não está claro para ele o que deve ser entendido por um 'conjunto', mesmo que ele tenha uma idéia da resposta correta, que aparece fracamente quando ele diz (p. 67 n.): 'Um conjunto já está completamente delimitado pelo fato de que tudo o que lhe pertence é determinado em si mesmo e bem distinto de tudo o que não lhe pertence'. Esta delimitação é, evidentemente, alcançada por marcas características e não é outra senão a definição de um conceito. Neste ponto, compare minha proposição (Grundlagen, §46): "... o conteúdo de uma declaração de número é uma afirmação sobre um conceito".(1984, p. 179)[114] (FREGE, G. *apud* TAIT, W.W. Frege versus Cantor and Dedekind, pg. 08)

A crítica feita por Frege parte do ponto de partida de que Cantor teria assumido o mesmo entendimento técnico empreendido por ele para o termo “conceito". Assim tomado, Frege entende que certamente há um problema com as definições de Cantor. A primeira delas diz respeito ao conceito de equipolência. Esse princípio, que também é denominado equinumericidade, se encontra, pelo menos em Frege, com grande proximidade ao princípio dos indiscerníveis, de Leibniz. Cantor adota princípio semelhante para definir a equipolência, dizendo que dois conjuntos são equivalentes quando possuem a mesma cardinalidade, ou quando possuem os mesmos elementos puros. Uma vez que Frege considera que Cantor adotou a mesma concepção de conceito que ele, a ideia de conjunto torna-se correlata ao percurso de valor. E isso leva ao segundo ponto de discordância. Para Cantor, esses puros elementos seriam

[114] I now see that the truths I enunciated in my book were not, after all, like coins dropped in the street which anybody could make his own simply by bending down. For Mr. Cantor goes on to give some other definitions (pp. 23 and 56) which show that he is still firmly ensconced in an antiquated position. He is asking for impossible abstractions and it is unclear to him what is to be understood by a 'set', even though he has an inkling of the correct answer, which comes out faintly when he says (p. 67 n.): 'A set is already completely delimited by the fact that everything that belongs to it is determined in itself and well distinguished from everything that does not belong to it.' This delimitation is, of course, achieved by characteristic marks and is nothing other than the definition of a concept. On this point compare my proposition (Grundlagen, §46): '... the content of a statement of number is an assertion about a concept'. (1984, p. 179)

produtos criativos da própria mente humana, de modo que ele os denomina de abstrações. Frege não concorda com essa abordagem, pois ela toma os elementos do percurso de valor e os transforma em elementos psicológicos e subjetivos. A distinção entre a abordagem de Frege com a abordagem de Cantor se torna clara a partir desse ponto. Na medida em que Frege radica a Aritmética para o domínio do enumerável, a cardinalidade passa a ser operada no campo de conceitos de segundo nível e aplicada sobre conceitos de primeiro nível. Justificar um enunciado aritmético mediante juízos analíticos se torna possível quando estabelecemos a referencialidade do conceito de primeiro nível para a enumerabilidade cardinal dos conceitos de segundo nível e estabelecemos o juízo sobre a extensão desse conceito mediante a relação biunívoca. Igualdade entre extensão de conceitos, nesse nível, é demonstrada mediante a equinumericidade ou equipolência extensional, tal qual definido pelo princípio de Hume e Leibniz. E a representação dos números como abstrações, na visão de Cantor, simbolizaria duas dimensões distintas de consideração dos números, nenhuma adotada por Frege: o campo objetivo efetivo e o campo psicológico e abstrato. Entre esses dois campos, haveria o campo objetivo não-efetivo. Segundo Haddock (2006):

> Os números *ao mesmo tempo não são perceptíveis pelos nossos sentidos, e são objetivos. Portanto, a base para a objetividade não pode ser encontrada nas impressões sensíveis - as quais são afecções de nossa psiquê e, portanto, subjetivas - mas somente na razão*[115]*.* (HADDOCK, G.E. A Critical Introduction to the Philosophy of Gottlob Frege, pg. 33).

Logo, podemos entrever que a distinção entre Frege e Cantor se estende para muito mais além do que uma concepção distinta referente ao uso específico que se poderia fazer sobre o emprego do conceito. É o que nota Tait. Segundo ele, Cantor não toma o conceito da mesma forma que Frege:

> A essa passagem, em resposta à pergunta "O que é o cardinal de M?", para a definição do cardinal de M como o conceito geral sob o qual caem precisamente aqueles conjuntos equipolentes a M,

[115] (...) numbers are neither spatial and physical nor subjective, like representations. They are at the same time not perceptible by our senses, and objective. Hence, the basis for objectivity cannot be found in sensible impressions – which are affections of our psyche and, thus, subjective – but only in reason (HADDOCK, G.E. A Critical Introduction to the Philosophy of Gottlob Frege, pg. 33).

> seguramente não deve nada a Frege. Ao definir o número cardinal de M como um "conceito geral", parece claro que Cantor não tinha em mente a noção técnica de conceito de Frege; em vez disso, ele estava seguindo a visão tradicional de acordo com a qual, por exemplo, o numeral '10' é um nome comum, sob o qual caem todos os conjuntos de dez elementos. (Por exemplo, veja Física de Aristóteles, 224a3-16.)[116] (TAIT, W.W. Frege versus Cantor and Dedekind, pg. 09).

Primeiramente, um dos problemas que Cantor encontra ao desenvolver seu conceito de infinito é que, uma vez estabelecido o conceito de equipolência de conjuntos, na verdade não temos como saber se os elementos que se encontram nos conjuntos são os mesmos. Isso ocorre porque os conjuntos não são considerados como percursos de valor, mas como agregados. Uma vez que a concepção de números é compreendida como abstrações humanas, de cunho psicologista, não existe nenhuma força coercitiva senão a própria força subjetiva, o que, mais uma vez, nos leva à intuição como forma reguladora das relações numéricas. Em outras palavras, os números são reunidos como agregados em uma sucessão.

Em Frege, todavia, isso não ocorre, pois os conjuntos na verdade apresentam, de um lado, uma relação de primeiro nível, onde objetos caem sob conceitos, de modo que os percursos de valor estão relacionados aos conceitos por estreitos laços de valores de verdade. E, de outro lado, há uma relação de propriedades de segundo nível, nas quais os números indicam enunciados sobre a cardinalidade dessas mesmas extensões do conceito, em uma relação na qual um conceito cai em outro conceito. Ao definirem os puros elementos de um conjunto como abstrações da mente humana, todas as relações acima, estruturadas logicamente, são deslocadas para um plano subjetivo e arbitrário, uma vez que assentam no âmbito psicológico, e não lógico. Isso leva Cantor a adotar a intuição como aparato técnico que justifica os conjuntos.

[116] The passage from this, in response to the question "What is the cardinal of M?", to the definition of the cardinal of M as the general concept under which fall precisely those sets equipollent to M, surely owes nothing to Frege. In defining the cardinal number of M as a 'general concept', it seems clear that Cantor did not have in mind Frege's technical notion of a concept; rather, he was following the traditional view according to which, for example, the numeral '10' is a common name, under which falls all ten-element sets. (For example, see Aristotle's Physics, 224a3-16.) (TAIT, W.W. Frege versus Cantor and Dedekind, pg. 09).

2.2 Derivações do conceito de Infinito para a Função

O logicismo fregiano, conforme acompanhamos até aqui, se desenvolveu a partir da tentativa de Frege de demonstrar na natureza lógica da Aritmética, na qual a identidade dos números se mostra mediante a cardinalidade nas relações de segunda ordem, e que permitiriam apresentar a natureza analítica dos juízos emitidos nessa instância, processo esse que Dummett (1995) denomina o ponto crucial em que ocorre a virada linguística. Para Dummett, esse momento ocorre a partir do §62 dos *Fundamentos da Aritmética*, quando, ao formular uma indagação não linguística, Frege procurou oferecer uma solução linguística[117]. A questão, sobre quais seriam os *Fundamentos da Aritmética*, é respondida mediante a lógica, deslocando os números para um domínio da razão, domínio esse identificado como o da enumerabilidade, mas que, na realidade, constitui o domínio lógico responsável pela atribuição e determinação das instâncias sob os conceitos de primeiro nível. Uma vez que, para formular esse domínio, Frege se valeu da definição extensional para deduzir os números, decorre que os números finitos passam a determinar a extensionalidade finita dos conceitos, enquanto que o infinito passa a determinar a infinitude extensional dos conceitos. Levantamos aqui duas instâncias: a primeira no que diz respeito aos conceitos universais, na generalidade que produz o indefinível, e que se manifesta na própria existência da função. A segunda, decorrente da primeira, é que a infinitude, determinando o indefinível acerca das funções/conceitos, dá origem, no campo do pensável, a um *continuum* de pensamentos temporais tornados intemporais.

A função, modo pelo qual Frege define o conceito, está intimamente ligada ao percurso de valor. A natureza da função é ser insaturada, necessitar de um complemento. A

[117] Vide DUMMETT, M. Frege, Philosopher of Mathematic, pg. 111.

relação entre conceitos e objetos é uma relação de primeiro-nível. A completude de um conceito consiste em um pensamento, ou um sentido que apresenta uma referência de uma certa forma. Assim, por exemplo, expressões como *1+3* e *2.2* seriam dois pensamentos, dois sentidos para uma mesma referência, ou duas formas diferentes de apresentação da mesma referência: o número 4. No supracitado §88 dos *Fundamentos da Aritmética*, onde Frege questiona o uso limitado que Kant faz dos juízos analíticos, ao considerar suas características como coordenadas, o autor sugere que o modo de proceder de Kant não consegue dar conta de uma relação como a da continuidade de uma *função*. Para ele, não temos, nesse caso, um conjunto de características coordenadas, mas sim uma relação mais íntima e orgânica de determinações[118] . Essa característica de relações abertas pelas *funções* é o que Frege considera responsável pela ampliação do nosso conhecimento e, precisamente por isso, não se pode antever o que se pode obter, por exemplo, da continuidade das funções. Isso pressupõe que a característica de insaturação das funções e, por sua contrapartida, dos conceitos, constitui uma característica intrínseca que mantém abertos os horizontes para novas relações estruturais com objetos e mesmo com conceitos de segundo nível. Por sua conexão com o domínio objetivo não-efetivo e com o domínio do enumerável, ambos mantidos em suas concepções nas *Leis Básicas da Aritmética*, de 1893-1906, Frege irá manter e desenvolver formalmente essa característica da continuidade da função.

Em *As Leis Básicas da Aritmética I* (1906), Frege inicia reforçando essas considerações a respeito da função, seu caráter insaturado e instaura um sinal específico para o marcador de posição ξ e que, segundo Frege, ganha o sentido de “manter-aberto"[119]. Esse caráter de *manter-aberto*, bem como as condições básicas de orientação de sinais que podem ser considerados válidos, implica a apreensão de todas as possibilidades

[118] Do original em alemão: Wir haben da nicht eine Reihe beigeordneter Merkmale, sondern eine innigere, ich möchte sagen organischere Verbindung der Bestimmungen (FREGE, G. Grundlagen der Arithmetik, §88).

[119]Conforme Basic Law, §1, onde se lê: *Este manter-aberto deve ser entendido da seguinte forma: todos os lugares em que “ξ” permanece deve ser preenchido sempre pelo mesmo sinal, nunca por um diferente*. (FREGE, G. Basic Law of Arithmetic, pg. 34).

de objetos elegíveis para a completude do conceito. Entender a função dessa forma conduz inevitavelmente a adoção do percurso de valor envolvendo a insaturação da expressão: *ξ^2 =4 é o valor de verdade do que é verdadeiro ou do que é falso.* (FREGE, G. Basic Law of Arithmetic, pg. 35).

Essa definição da expressão funcional implica todos os valores possíveis para preencher a função, conforme o próprio Frege enumera:

> As expressões
>
> "0^2=4", "1^2=4", "2^2=4", "3^2=4"
>
> São expressões de pensamentos, alguns verdadeiros, alguns falsos[120]. (Idem, §2).

Se tanto pensamentos verdadeiros quanto falsos são válidos para a função/conceito, então podemos nos indagar qual seria o limite, nessas condições, para um percurso de valor?

Entramos aqui na mesma situação encontrada nos *Fundamentos da Aritmética*, e que resultou na definição de infinito como aquele que sucede a si mesmo em uma série. Isso significa que, por definição, a existência do marcador de posição ξ implica a definição de infinito para toda a curva de valor que se formar para completá-la. Não apenas isso, toda função também é designativa de generalidade.

Em 1904, ao escrever o artigo "O que é uma Função?", Frege apresentou o seguinte problema: o que designamos quando utilizamos termos como "x", "y" e "z"? A resposta de Frege, ao contrário da esperada resposta "números variáveis", foi "indefinido". Afirma o autor:

---

[120] , 0^2 = 4 ' , 1^2 = 4 ' , 2^2 = 4 ' , 3^2 = 4 '

sind Ausdrücke von theils wahren, theils falschen Gedanken (Idem, §2).

> Certamente, pode-se nesse caso falar de indefinição; mas "indefinido" não é aqui um adjetivo de "número", mas ['indefinidamente'] é um advérbio que modifica o verbo "indicar". Não cabe dizer que [a letra] "n" designa um número indefinido, mas cabe dizer que indica indefinidamente números. (FREGE, G. O que é uma função?, pg. 199)

As letras presentes em uma função não designam números variáveis. Entretanto, é possível indicar indefinidamente números. Essa questão inicialmente proposta por Frege como crucial para entendermos a estrutura de uma função, também abre margem para a distinção entre a designação de algo, isto é, a nomeação de algo, e a indicação indefinida da possibilidade de algo. Para o autor, toda a questão se encontrava envolvida em uma confusão de referencialidade, onde não se sabia claramente o que se designava com os sinais das variáveis:

> A distinção entre sinal e coisa designada nem sempre foi feita com o devido rigor, de maneira que, em se falando de expressão do cálculo (expressio analytica), chegou-se, ou quase, a compreender sob tal expressão também sua referência. Mas o que designa "x^2 + 3x"? Propriamente falando, absolutamente nada, pois a letra "x" indica apenas números, mas não os designa. Se substituímos "x" por um numeral, obtemos uma expressão que designa um número; e, portanto, nada de novo. Como o próprio "x", a expressão "x^2 + 3x" apenas indica [sem designar]. Este uso [das letras] permite expressar a generalidade(...) (Idem, pg. 202).

Portanto, o que as letras que supostamente expressam variáveis fazem é, na realidade, evidenciar a expressão da generalidade. Para Frege, a função possui uma característica muito distinta e importante. Além de representar a generalidade por meio do uso das letras, a função, na medida em que indica um numeral, diferencia-se irrevogavelmente dele. Afirma Frege:

> Essa necessidade de ser complementada pode-se pôr em evidência mediante parênteses vazios, por exemplo "sen ( )" ou "( )2+3( )". Este modo de notar não deve ter nenhuma aceitação, embora seja, para esse caso, o procedimento mais apropriado e

> mais adequado para evitar a confusão que emerge de considerar o sinal de argumento como parte do sinal funcional. Uma letra pode também ser utilizada para essa finalidade. Se, para tal, escolhemos "ξ", então "sen ξ" e "$\xi^2 + 3\ \xi$" são sinais funcionais. Mas, ao assim fazer, deve ficar estabelecido que "ξ" tem aqui apenas a tarefa de marcar os lugares onde o sinal que complementa a função deve ser introduzido. E será melhor também não empregar essa letra para nenhuma outra finalidade e, sobretudo, não a empregar em lugar de "x", que serve em nossos exemplos para expressar a generalidade. (Idem, pg. 203).

Se, conforme Frege afirma, a função pode ser graficamente representada por parênteses que indicam espaços vazios, então não existe possibilidade de uma função ter qualquer relação com numerais. Como vimos anteriormente, Frege havia definido os números não como propriedades das coisas, dos objetos, mas como os próprios objetos. Essa distinção significa que os números não classificam as coisas, pois elas não carecem de complementação. Um número jamais poderia ser um espaço vazio. Um espaço vazio, próprio da função, corresponde a uma insaturação. Esse fato sobre a função não é uma novidade, visto que já mencionamos isso no capítulo anterior. Entretanto, trouxemos novamente a questão por um motivo importante, principalmente pelas considerações de Frege sobre a função em 1904:

> A essa peculiaridade do sinal funcional, que denominamos de insaturação, corresponde, naturalmente, algo nas próprias funções. A estas também podemos chamar de insaturadas, caracterizando-as desse modo como essencialmente distintas dos números. (Idem, pg. 204)

O que vemos aqui é que a distinção entre função e números é absoluta. A função é insaturada, mas sua insaturação não é temporária, é essencial. Assim como ela indica indefinidamente um número, ela é insaturada indefinidamente.

Dessa forma, uma consequência da indeterminação e generalidade inerente à função se reflete na cardinalidade de um conceito. Dizer que um conceito é contável ou enumerável, no sentido que atribuímos no Capítulo 1, implica em indicar a extensão de um conceito em sua cardinalidade. Mas se, como mostrado anteriormente, a extensão de conceitos inclui tanto os valores de verdade *verdadeiro* como o *falso*, ocorre que não encontramos um limite extensional para os conceitos, dado que os objetos possíveis em uma extensão se estendem indefinidamente, em conformidade com a indicação funcional. O logicismo fregiano, mediante a introdução da função, da extensionalidade, dos enunciados de segunda ordem e da saturação de conceitos, concebe a entrada da infinitude, em sua estrutura lógica. De maneira semelhante, em sua derivação para o pensamento, veremos que a infinitude se desdobrará na concepção que se dá a partir do argumento dos infinitos sentidos de Frege.

2.3 Os Infinitos Sentidos de Frege e a Função do Tempo

A ideia de objetividade do pensamento pela via das fontes analíticas do conhecimento empreendida por Frege não se encontra isolada. Ela remonta aos trabalhos de Bolzano que, ao considerar a concepção kantiana de pensamento e subjetividade demasiadamente psicologista, por recorrer continuamente à intuição *a priori* e, portanto, ao tempo e ao espaço, passa a conceber um modelo de "espaço lógico" para o pensamento, um espaço de objetividade e de independência em relação à subjetividade. Nesse espaço objetivo, os pensamentos já possuíam existência independente de serem pensadas. Apresentaremos, de forma breve, a estrutura fundamental na qual Bolzano estabelece, por contraposição a Kant e à lógica clássica, sua concepção de Terceiro Domínio como tentativa de estabelecer a objetividade do pensamento e, em contrapartida, apresentaremos a forma como os pensamentos, para Frege, assumem uma infinitude em um aspecto que podemos considerar menos artificial, como decorrência da quantificação da cardinalidade de segundo nível.

Em seu trabalho central, a *Theory of Science*, de 1837, Bolzano define os principais pontos de seu trabalho lógico:

1. As ideias não possuem valor de verdade;

2. Proposições são as únicas passíveis de receberem os atributos de verdadeiro e falso e, embora não ocupem lugar no tempo e espaço, possuem existência concreta e independente de todo e qualquer tipo de entidades mentais;

3. Existe um domínio objetivo no qual essas proposições em si possuem validade de forma independente da subjetividade.

O percurso traçado por Bolzano para estabelecer esses princípios remonta a uma crítica crucial ao desenvolvimento da lógica no contexto do século XIX. Para Bolzano, desde o início de sua investigação fica claro que existe um problema com a concepção clássica de lógica, que consiste em pensá-la como a estrutura "formal do pensamento". Esse proceder oculta uma concepção psicologista, na qual processos psíquicos seriam descritos pela lógica ao definir a forma pura do pensamento.

Entretanto, segundo Lapointe (2011)[121], Bolzano redefine a lógica como sendo aquela que não se ocupa em sustentar o pensamento, mas sim as verdades em geral. Dessa forma, a busca de Bolzano em estabelecer a objetividade do pensamento é, antes de tudo, o de estabelecer a objetividade da verdade, o que implica, em última instância, a manutenção da objetividade de proposições verdadeiras.

É em função desse princípio de forma da verdade e objetividade da mesma que levou Bolzano ao procedimento substitutivo, pelo qual quaisquer partes constitutivas de uma proposição *S* poderiam ser substituídas em relação a uma proposição *T*, desde que não se perdesse o valor de verdade das mesmas. Essa abordagem permite a Bolzano abster-se de trabalhar com expressões linguísticas, concentrando-se na forma proposicional, o que lhe possibilitou trabalhar com conjuntos de proposições, combinando relações entre proposições, como as mencionadas *S* e *T*.

[121] Vide LAPOINTE, S. Bolzano´s Theoretical Philosophy, 2011, pg. 44.

Esse distanciamento produzido por Bolzano, no entanto, ainda não era suficiente para assegurar a objetividade das proposições em relação às concepções psicologistas. Daí a necessidade de estabelecer um domínio de objetividade pura para as proposições verdadeiras, que passariam a existir independentemente de quaisquer entidades mentais de cunho psicologista e numa instância que se posicionasse fora do âmbito da relação espaço-tempo, base do pensamento kantiano.

Para Lapointe:

> Noções lógicas são definidas por conjuntos inteiros de proposições: quando Bolzano diz que uma dada proposição tem certa propriedade com respeito a determinados componentes, ele quer dizer que o conjunto de proposições associadas contém todos os membros compartilhando algum vocabulário fixo. Se nós seguirmos Bolzano - afirma Lapointe - conjuntos de proposições compartilham todas as ideias, mas aquelas identificadas como arbitrariamente intercambiáveis são representadas por expressões linguísticas contendo uma ou mais variáveis [122] . (LAPOINTE, S. Bolzano´s Theoretical Philosophy, pg. 46).

Depreende-se desse método, que todas as relações que determinam os valores verdadeiros ou falsos são extraídos do universo de relações entre conjuntos de proposições. Bolzano descreve, em seu *Theory of Science*, um conjunto diverso de relações dadas entre gêneros e espécies de proposições, no qual o universo de proposições verdadeiras consiste no conjunto de espaço de objetividade independente de nossa subjetividade. Espaço concreto, porém não pertencente ao tempo e espaço.

Esse universo de conjunto de proposições e termos desenvolvidos por Bolzano constitui o que ele denominará *Terceiro Domínio*, composto pelas ideias e proposições em si (*vorstellung an sich e satz an sich*). Esse terceiro domínio distingue-se do domínio dos

[122] Logical notions are defined for entire sets of propositions: when Bolzano says that a given proposition has a certain property with respect to determinate components, he means that the associated set of propositions contains members all sharing some fixed vocabulary. If we follow Bolzano, sets of propositions sharing all ideas but those identified as arbitrarily exchangeable are represented by linguistic expressions containing one or more variables (LAPOINTE, S. Bolzano´s Theoretical Philosophy, pg. 46).

pensamentos subjetivos (dos quais se pressupunha que a lógica deveria ser responsável pela estrutura formal) e do domínio dos objetos aos quais as ideias e proposições se referem.

Entretanto, se Bolzano estruturou esse terceiro domínio fundamentado no conceito de conjunto e na extensionalidade de seus termos, qual seria a extensão desse domínio?

De acordo com Jan Berg (1973), o *Terceiro Domínio* de Bolzano possui algumas limitações. Primeiramente, nem todas as denominadas ideias primitivas seriam consideradas ideias concretas. De acordo com Berg, uma ideia como "Sócrates" não seria considerada concreta, pois, de acordo com Bolzano, a identidade de uma ideia não poderia ser fixada pela relação com suas propriedades. Dessa forma, algo dito sobre Sócrates poderia ser considerado concreto, uma vez que possui valor de verdade, mas o próprio termo *Sócrates* não poderia ser considerado concreto. Essa limitação se deve ao comprometimento ontológico de Bolzano com proposições verdadeiras, por um lado, e com a existência ontológica dos termos e ideias primitivas utilizadas para a criação de proposições, o que nos leva a considerar que proposições imaginárias, por não demonstrarem comprometimento com valores de verdade ou com a identidade ontológica entre termos, ideias e referências concretas, não poderiam ser consideradas ou fazerem parte desse Terceiro Domínio, perdendo seu estatuto de objetividade.

O segundo ponto diz respeito aos juízos. Para Bolzano[123], todo juízo possui uma proposição P como estrutura material e possui existência concreta na mente de quem toma P como verdadeiro. Buscando distanciar-se de Kant que, em sua concepção, tomava o juízo como algo sobre o qual alguém poderia meramente pensar em P, em um sentido psicológico, Bolzano vincula o juízo a uma relação material e sua existência concreta com uma proposição que não era "considerada" verdadeira, em sentido psicológico, mas "aceita" como verdadeira, em sentido lógico e objetivamente independente.

[123] Vide BOLZANO, B. Theory of Science,1973, §34, pg. 291.

Não obstante a isso, Bolzano estabelece uma dedução a partir dessa concepção de juízo e de seu reducionismo de toda expressão linguística a expressões formais, na qual se pode concluir um universo infinito de proposições *P* verdadeiras. De acordo com Bolzano:

> (2) Se alguém afirma que existe apenas uma única verdade; então me deixe permitir designá-lo, seja o que for que diga, por A é B; e agora vou provar que há pelo menos uma segunda verdade além desta. Para qualquer um que assume o contrário também deve conceder que a asserção, "Não há outra verdade além de A é B", é verdade. Mas esta afirmação é obviamente distinta da afirmação, A é B, em si; pois é composto de partes inteiramente diferentes. Esta afirmação, consequentemente, se fosse verdade, seria imediatamente uma segunda verdade[124]. (BOLZANO, B. Theory of Science, §§ 32 e 33)

A partir dessa definição, Bolzano demonstra a derivação de proposições verdadeiras potencialmente infinitas, todas elas concretas e independentes.

Dessa forma, Bolzano estabelece um "espaço lógico" de dimensão infinita, composto de miríades de proposições distintas que expressam verdades aceitas por quaisquer juízos realizados a qualquer tempo por qualquer mente racional. A influência de Bolzano na construção da filosofia analítica e do logicismo é notória, motivo pelo qual expomos brevemente a abordagem deste na formação de seu pensamento.

Entretanto, a objetividade do pensamento exposto por Bolzano e que, considerados certos ajustes, seria continuamente retomada, conseguiria dar conta de todas as proposições que requeiram fazer parte desse espaço objetivo? Pelo que foi exposto, as principais características do Terceiro Domínio se pautariam por compor proposições que:

---

[124] If someone claims that there is only a single truth; then let me be permitted to designate it, whatever it may say, by *A* is *B*; and I will now prove that there is at least a *second* truth besides this one. For anyone who assumes the opposite must also grant that the assertion, "There is no other truth besides *A is B*, " is true. But this assertion is obviously distinct from the assertion, *A is B*, itself,; for it is made upo f entirely different parts. This assertion, consequently, IF it were true, would immediately be a second truth (BOLZANO, B. Theory of Science, §§ 32 e 33).

1. São intrinsecamente verdadeiras ou, pelo menos, sejam bipolares;

2. Não sejam circunscritas ao espaço e ao tempo (caso em que cairiam no psicologismo);

3. Termos primitivos que não sejam conceitos não podem ser considerados como ideias concretas.

Mas, uma vez dadas essas características, como podemos categorizar expressões bipolares que dependam de contextualizações temporais e espaciais para engendrarem valores de verdade? Ou proposições cujos valores de verdade mudam conforme a circunstância de seu pronunciamento ou mesmo proposições cujo valor de verdade não pode ser precisado no momento, mas apenas em um futuro distante? E onde se enquadram proposições que, não obstante não possuam valores de verdade, podem ser compreendidas e comunicadas ao longo do tempo, e que não possuem caráter subjetivo? Diante dessas possibilidades, a concepção fregiana de campo objetivo não-efetivo, que posteriormente seria denominado de Terceiro Reino, parece indicar um caminho original para resolver o problema.

O estatuto lógico de quantificador existencial de conceitos de primeiro nível concebido aos números mediante o operador de cardinalidade permite a Frege formular enunciados como "o número que vale para o total de luas de Júpiter". O número, nesse caso, é uma correlação ao conceito "luas de Júpiter", e não o objeto que cai sob o conceito. Entretanto, essa concepção acarreta um problema imediato, que Haddock chama atenção. O que dizer sobre um conceito como: o número de cidadãos canadenses? Esse número, segundo Haddock, está sempre mudando, pois todos os dias pessoas morrem e nascem no Canadá. De acordo com o comentador, Frege não ignora essa possibilidade. A solução, conforme Haddock, segue abaixo:

> Frege responde a essa possível objeção lembrando-nos que os objetos mudam suas propriedades com o tempo, mas isso não nos impede de reconhecer esses objetos como sendo os mesmos objetos. Além disso, pode-se argumentar que, embora o conceito presumido "cidadão do Canadá" tenha um componente temporal, ao conceito "cidadão do Canadá ao meio-dia de 1º de janeiro de

> 2005" corresponde o mesmo número para a eternidade [125]. (Haddock, A critical introduction of Frege, pg. 35-36)

Conforme Frege expressa nos Fundamentos:

> Pode-se objetar que um conceito como "habitante do império alemão", por exemplo, embora permanecendo inalteradas suas notas características, teria uma propriedade variável de ano para ano, se a indicação numérica enunciasse dele uma propriedade. Pode-se fazer valer contra isto que também os objetos modificam suas propriedades, o que não impede de serem reconhecidos como os mesmos. Cabe, porém, uma justificação mais precisa. O conceito "habitante do império alemão" contém de fato o tempo como elemento variável, ou, exprimindo-me matematicamente, é uma função do tempo. Ao invés de "*a* é um habitante do império alemão", pode-se dizer: "*a* habita no império alemão", que se refere precisamente ao momento presente. Há pois já no próprio conceito algo fluido. Por outro lado, ao conceito "habitante do império alemão no Ano Novo de 1883, hora de Berlim" convirá o mesmo número por toda a eternidade[126]. (Frege, G. *Fundamentos da Aritmética*, § 46).

A solução adotada por Frege em 1884 para o problema da variabilidade numérica atribuída ao pensamento é notoriamente a mesma empregada por ele em 1918, no artigo intitulado “O Pensamento”[127]. Para Frege, o critério que define o que pode ou não fazer parte do campo objetivo não-efetivo (ou 3º Reino, em “O Pensamento”) começa a

[125] Frege answers this possible objection by reminding us that objects change their properties with time, but that does not prevent us from recognizing those objects as being the same objects. Moreover, one could argue that though the presumed concept ‘citizen of Canada’ has a temporal component, to the concept ‘citizen of Canada at noon of the 1st of January 2005’ there corresponds the same number for eternity (Haddock, A critical introduction of Frege, pg. 35-36).

[126] Man mag einwenden, dass ein Begriff wie z. B. „Angehöriger des deutschen Reiches,“ obwohl seine Merkmale unverändert bleiben, eine von Jahr zu Jahr wechselnde Eigenschaft haben würde, wenn die Zahlangabe eine solche von ihm aussagte. Man kann dagegen geltend machen, dass auch Gegenstände ihre Eigenschaften ändern, was nicht verhindere, sie als dieselben anzuerkennen. Hier lässt sich aber der Grund noch genauer angeben. Der Begriff „Angehöriger des deutschen Reiches“ enthält nämlich die Zeit als veränderlichen Bestandtheil, oder, um mich mathematisch auszudrücken, ist eine Function der Zeit (FREGE, G. Der Grundlagen der Arithmetik, §46).

[127] Nesse artigo, de 1918, Frege desenvolve as consequências e o mecanismo pelo qual pensamentos temporais tornam-se intemporais ao adquirirem valor de verdade.

ser esboçado nos Fundamentos, em sua distinção de domínio objetivo não-efetivo, objetivo efetivo e subjetivo. Essa distinção se estende para o artigo “Sobre o Sentido e a Referência”. Frege estabelece três parâmetros: a referência, que é o campo dos objetos que serão nomeados e referidos no pensamento e na linguagem. Constitui-se de todas as coisas efetivas e objetos lógicos; as ideias (ou representações) que consistem em nossas representações pessoais e subjetivas, que não podem ser compartilhadas com outros; e por fim, acompanhando o nome que atribuímos às coisas estão os sentidos, que se constituem no modo de apresentação das entidades que se tornam referência para elas. Diferentes das ideias, os sentidos podem ser compartilhados de geração em geração sem perda de significado ou compreensão. Esses pensamentos, poder-se-ia pensar tratar-se de sentenças bipolares, que expressam valores de verdade. Nesse caso, o que ocorre com pensamentos que não possuem referência, como no caso da poesia ou em afirmações fictícias, como em "Ulisses, profundamente adormecido, foi desembarcado em Ítaca"? Para Frege, essa expressão possui claramente um sentido, porém não possui uma referência. De acordo com Frege:

> Se o interesse fosse só o sentido da frase, ou seja, o pensamento, então não seria preciso inquietar-se com a referência de uma parte da frase; pois para o sentido de uma frase é relevante apenas o sentido, e não a referência dessa parte. O pensamento permanece o mesmo, caso o nome “Ulisses” tenha ou não uma referência. Que realmente nos preocupemos com a referência de uma parte da frase, é um indício de que em geral também reconhecemos e demandamos uma referência para a própria frase[128]. (FREGE, G. Sobre o Sentido e Referência, pg. 138)

Dessa forma, temos de concluir que, para Frege, pensamentos que não possuem valor de verdade (por não possuírem referência) mantêm seu status e objetividade uma vez que não pertencem a um campo do discurso privado.

---

[128] Käme es nur auf den Sinn des Satzes, den Gedanken, an, so wäre es unnötig, sich um die Bedeutung eines Satzteils zu kümmern; für den Sinn des Satzes kann ja nur der Sinn, nicht die Bedeutung dieses Teiles in Betracht kommen. Der Gedanke bleibt derselbe, ob der Name »Odysseus« eine Bedeutung hat oder nicht. Daß wir uns überhaupt um die Bedeutung eines Satzteils bemühen, ist ein Zeichen dafür, daß wir auch für den Satz selbst eine Bedeutung im allgemeinen anerkennen und fordern (FREGE, G. Über Sinn und Bedeutung, pg. 30, §33).

Não obstante a isso, existe outra condição na qual essa sentença poderia ser abordada, caso em que ela engendraria um valor de verdade. Seria o caso em que ela fosse tomada como referência indireta para outra sentença, disposta como citação em discurso direto. Frege afirma:

> Se as palavras são usadas de modo costumeiro, o que se pretende é falar de sua referência. Mas pode acontecer que se deseje falar das próprias palavras ou de seu sentido. O primeiro caso se dá quando as palavras de outrem são citadas em discurso direto. Nesse caso, as palavras de quem cita referem-se, imediatamente, às palavras de quem é citado, e somente estas últimas têm a referência costumeira. Temos, assim, sinais de sinais [129] (...) (FREGE, G. Idem, pg. 133)

Sendo assim, existem duas possibilidades nas quais poderíamos tomar a expressão:

1. A expressão possui sentido, mas não possui uma referência - a mesma não apresentará valor de verdade, mas constitui-se um pensamento. Os sentidos de tais expressões não corresponderão a nenhum discurso de natureza científica. Por tal definição, inferimos que um sentido/pensamento pode ser completo e não corresponder a uma referência;

2. A expressão possui sentido, e sua referência pode ser indireta - nesse caso, embora a expressão seja fictícia, ela diz respeito a uma expressão supostamente proferida por Homero, na obra Ilíada. Nesse caso teríamos um valor de verdade, na qual seria verdadeiro que tal expressão tenha sido proferida por Homero. A validade da expressão se remeteria indiretamente a ter sido proferida ou não, e não ao fato de ter diretamente ocorrido ou não. Seria o sentido de um sentido. Esse sentido torna-se referência daquele, e engendra valor de verdade. Nesse caso, o pensamento possui um conceito que pode ser validado pelo juízo.

[129] Wenn man in der gewöhnlichen Weise Worte gebraucht, so ist das, wovon man sprechen will, deren Bedeutung. Es kann aber auch vorkommen, daß man von den Worten selbst oder von ihrem Sinne reden will. Jenes geschieht z.B., wenn man die Worte eines anderen in gerader Rede anführt. Die eigenen Worte bedeuten dann zunächst die Worte des anderen, und erst diese haben die gewöhnliche Bedeutung. Wir haben dann Zeichen von Zeichen (Idem, pg. 25, §28)

Precisamente essa segunda circunstância foi considerada por Klement (2003) como uma das fontes da infinitude dos sentidos em Frege. Klement, no artigo intitulado “Number of Senses”, inclui formulações, como a mencionada acima, enquadradas no que ele denomina *Princípio de Sentido como Entidades*, onde um referente *A* poderia ser apresentado por pelo menos um sentido *S1*, e o sentido *S1*, sendo uma entidade objetiva, poderia ser apresentado por um sentido *S2*, e *S2* por um sentido *S3*, estendendo-se potencialmente ao infinito.

“Sobre o Sentido e a Referência” reforça essa tese, pois Frege reconhece que uma referência só poderia ser plenamente conhecida se tivéssemos conhecimento de todos os seus sentidos. Mas Frege afirma que isso (conhecer todos os sentidos possíveis para uma referência) seria impossível.

Em 1918-19, Frege escreveu o artigo conhecido como “O Pensamento”, parte do conjunto de artigos que formaria o trabalho conhecido como *Investigações Lógicas*. Nesse artigo, Frege mantém a ideia central de que sentidos diversos podem se estender indefinidamente a respeito de uma referência, e isso ainda poderia gerar inúmeros contextos, todos, no entanto, com estatuto de objetividade não-efetiva que, no conjunto apresentado por Frege nesse artigo, ganham o desdobramento de *3º Reino*[130].

Afirma Frege:

---

[130] A esse respeito, Frege segue, no artigo “O Pensamento”, a seguinte linha de raciocínio: 1. Ideias pertencem ao campo de um discurso privado, enquanto que o sentido pertence ao campo do discurso público. As ideias só podem ser compreendidas plenamente por aquele que as enuncia, pois elas se circunscrevem ao campo da subjetividade. Em “O Pensamento”, Frege acrescenta outra característica extremamente importante para distinguir ideia de pensamento: ideias só existem como pertencentes a um portador. Sentidos não necessitam de um portador para existir, se encontrando vinculadas às referências ou não. 2. Sentidos são formas de apresentação de objetos, enquanto ideias são formas subjetivas de percepção e interpretação desses objetos. Sentidos, portanto, se submetem a leis lógicas, daí sua objetividade e universalidade, independente de um portador, mas podendo ser apreendida por qualquer inteligência que se paute nas regras do pensamento, regras essas lógicas e atemporais. Enquanto que a ideia se submete às regras do pensar e da subjetividade, dependendo de um portador para existir, pois depende de sua percepção pessoal para existir. Dada essa distinção, Frege enuncia uma catalogação mais distintiva das três áreas: ao 1o Reino correspondem todas as entidades objetivas efetivas, ao 2o Reino pertencem todas as ideias e representações privadas e subjetivas. Ao 3o Reino, que nos importa aqui, cabem todos os sentidos/pensamentos, que são objetivos não-efetivos.

> É preciso admitir um terceiro domínio. O que este contém coincide com as ideias, por não poder ser percebido pelos sentidos, e também com as coisas, por não necessitar de um portador a cujo conteúdo de consciência pertenceria. Assim, por exemplo, o pensamento que expressamos no teorema de Pitágoras é intemporalmente verdadeiro, verdadeiro independentemente do fato de que alguém o considere verdadeiro ou não. Ele não requer nenhum portador. Ele é verdadeiro não a partir do momento de sua descoberta, mas como um planeta que já se encontrava em interação com outros planetas antes mesmo de ter sido visto por alguém. (FREGE, G.Idem, §34)

Isso significa que a intemporalidade é um elemento distintivo para o pertencimento no 3º Reino fregiano. Mas, como mencionamos acima, inúmeros enunciados que necessitam de um contexto temporal para serem abordados analiticamente e desenvolverem valor de verdade encontram-se, aparentemente, vinculados ao momento em que foram declarados ou pensados. Para Frege, no entanto, mesmo um pensamento como "Eu fui ferido", do doutor Gustav Lauben, possui intemporalidade. Embora necessitem de um aparato temporal para que seja determinado seu valor de verdade, essa ancoragem temporal caracteriza um pensamento como completo e o distingue de outros em sua intemporalidade:

> Mas não há pensamentos que são verdadeiros hoje, mas falsos decorrido um semestre? Por exemplo, o pensamento de que aquela árvore está coberta de folhas verdes será seguramente falso com o decorrer de um semestre. Não, posto que não se trata do mesmo pensamento. As palavras "Esta árvore está coberta de folhas verdes" não bastam por si mesmas para expressar o pensamento, pois o momento do proferimento também faz parte dele. Sem a indicação temporal, que é dada pelo momento do proferimento, não temos um pensamento completo, vale dizer, não temos absolutamente nenhum pensamento. Só uma sentença complementada por uma indicação temporal, e completa sob todos os aspectos, expressa um pensamento. Mas este pensamento, caso seja verdadeiro, não é verdadeiro somente hoje ou amanhã, porém intemporalmente verdadeiro. O tempo presente em "é verdadeiro" não indica o momento presente de quem fala, mas, se a expressão me for permitida, um tempo da intemporalidade. Quando empregamos a mera forma da sentença assertiva, evitando a palavra "verdadeiro", devem se distinguir duas coisas: a expressão do pensamento e a asserção. A indicação temporal, que pode estar contida na sentença, pertence somente à expressão do pensamento, enquanto que a verdade, cujo reconhecimento reside

> na forma da sentença assertiva, é intemporal. (FREGE, G. Idem, §49)

Por fim, Frege define certa virtualidade ou potencialidade de uso e de efetivação dos pensamentos. A existência dos pensamentos de forma independente a seus portadores ou consciências não invalida sua objetividade. Entretanto, essa objetividade não possui efetividade, no sentido de atualidade e de colocar em movimento outros objetos sensíveis. Entretanto, todos os pensamentos se encontram no *Terceiro Reino*, em sua intemporalidade, potencialmente aptos para atualização. Afirma Frege:

> Os pensamentos não são, de modo algum, irreais, mas sua realidade é de uma natureza totalmente diferente daquela das coisas. E sua eficácia surge pela ação daquele que os pensa, sem o que seriam totalmente ineficazes, pelos menos tanto quanto podemos ver. Contudo, quem os pensa não os cria, mas deve tomá-los tais como eles o são. Podem ser verdadeiros sem ser apreendidos por alguém que pense e, mesmo assim, não são inteiramente irreais, ao menos se podem ser apreendidos e, assim, postos em ação. (FREGE, G. Idem, §51)

As questões levantadas por “O Pensamento” são complexas para o que temos no âmbito da controvérsia sobre a fonte analítica do conhecimento. Se novos sentidos podem ser criados temporalmente e se tornam intemporais e igualmente eternos, então qual é o estatuto que tais pensamentos possuem? Eles ainda são considerados analíticos? Ou seriam considerados sintéticos? Para um intérprete tradicional de Frege, que tomasse os conceitos de analítico e sintético, tais como Kant os tomou, eles seriam considerados sintéticos. Entretanto, considerando como Frege os emprega e os estende, temos dificuldades em delimitar onde um termina e onde inicia o outro. A introdução do tempo no pensamento, tempo esse que desencadeia indeterminados enunciados, todos eles tornados intemporais uma vez que possuam valores de verdade, abre o horizonte de pensamentos possíveis no conjunto da fonte analítica do conhecimento. Esse conjunto, naturalmente, compreende um conjunto infinito e, nesse caso, ao nos indagarmos *qual conceito F convém ao número ∞,* estaríamos nos referindo ao conjunto de pensamentos universais, como o teorema de Pitágoras, mas também a todos os pensamentos indeterminados definidos pelo que Frege denominou *função do tempo*[131]. A função do tempo, conforme Frege indicou no §46 dos *Fundamentos*, indica um elemento variável e fluído (*Fliessendes*). Vale notar que, ao abordar o elemento variável e fluído do tempo nos enunciados, isso não implica dizer que Frege esta reinserindo as proposições na forma pura de intuição kantiana do tempo. O tempo aqui é uma função, uma variável temporal que confere ao enunciado um contexto para construção de sentido, de modo que esse enunciado possa ser tomado analiticamente em sua relação com a quantificação de segundo nível e possa, assim, deter um valor de verdade específico para si enquanto pensamento completo. Um exemplo dessa aplicação para o enunciado *o número de cidadãos de São Paulo:* tomado assim, sem a função de tempo aplicada, o enunciado torna-se incompleto, pois não apresenta o contexto que permita encontrarmos sua correlação com a quantificação de segundo nível. Entretanto, quando dizemos *o número de cidadãos de São Paulo em 2016*, temos que, em uma relação de segundo nível, *o número que convém ao conceito 'o número de cidadãos de São Paulo em 2016' é 12.038.175.* Notemos que o primeiro enunciado sem o contexto de tempo consiste em um pensamento distinto do segundo, dado que não possui indicações que nos permita determinar sua extensão. Se, em contrapartida, dissermos *o número de cidadãos de São Paulo em 2015*, já teremos um novo pensamento que possuirá, em sua relação de segundo nível, *o número que convém ao conceito 'o número de(...) em 2015' é 11.967.825.*

A problemática que surge dessa condição diz respeito às implicações de termos um fluxo contínuo de pensamentos temporais tornados intemporais. Chamamos atenção para o fato de que a função de tempo, em seu caráter continuamente indefinido, conforme indicamos anteriormente[132], possibilita um potencial desdobramento indeterminado de pensamentos com condicionalidade temporal. Em sua temporalidade,

[131] Vide §46 dos Grundlagen der Arithmetik, onde Frege emprega o termo *Function der Zeit.*

[132] Conforme apresentamos nas páginas 72 a 74.

entendemos que os pensamentos se encontram em um contínuo processo de criação, com valores de verdade alternados e válidos. Também é notório o fato de que *Os Fundamentos da Aritmética* trouxe elementos e estruturas que influenciaram diretamente obras maduras do autor, como *As Leis Básicas da Aritmética* e “O Pensamento”. Esses dois desdobramentos, a indefinição contínua da função/conceito e os infinitos sentidos dela decorrente implicam um contexto infinito e um *continuum* de pensamentos que, em sua totalidade, compõem o infinito atual, um conjunto de todos os conjuntos de pensamentos. Como tal, é necessário que esse conjunto possa ser definido axiomaticamente em suas relações. O processo de construção axiomática dos elementos contidos nos *Fundamentos da Aritmética*, no entanto, só se daria em 1893-1906, quando da publicação das *Leis Básicas da Aritmética* e, portanto, para seguirmos a trajetória de Frege na fundamentação do logicismo no domínio da enumerabilidade do pensável, analisaremos brevemente como Frege procura definir axiomaticamente os elementos aqui apresentados.

2.4 Infinitude e Lei Básica V

As duas condições que acompanhamos até o momento, enquanto consequência da estrutura extensional do logicismo fregiano, são condições permeadas de infinitude. No caso das funções (função no sentido aritmético, mas conceito no sentido linguístico) a indefinibilidade inerente em seu núcleo implica a extensionalidade de objetos que caem sob eles, e acarreta, como consequência, a possibilidade de constituir infinitos sentidos para qualquer referência, independente de haver valores de verdade atribuíveis, uma vez obtida uma configuração saturada. A segunda condição, decorrente da primeira, ocorre no campo semântico, e engendra a temporalidade na construção do pensamento e, em contrapartida, um *fluxo* de reconstrução de sentidos contextuais e valores de verdade, tornados intemporais por meio do juízo e justificados pelo domínio objetivo não-efetivo.

Entretanto, nos *Fundamentos da Aritmética*, Frege não considera que sua solução possa acarretar inconsistência no sistema de conjuntos adotados no logicismo, uma vez que o fundamento deste não deixa de ser o fundamento analítico. Porém, Heck (2013), chama atenção para o fato de que, tanto para Dummett quanto para Boolos, é nas *Leis Básicas da Aritmética*, que Frege desenvolverá axiomaticamente os elementos apresentados inicialmente nos *Fundamentos da Aritmética*[133].

Nesse contexto, a partir da Lei Básica V, constante fundamental das *Leis Básicas da Aritmética*, encontramos um ponto de especial relevância para nossa investigação, dadas as duas instâncias em que ela se aplica, e sem as quais não é possível formular logicamente a estrutura basilar dos *Fundamentos da Aritmética*. Em primeira instância, a Lei Básica V estabelece o princípio de equinumericidade entre conceitos, mediante a fórmula:

$$\vdash (\grave{\varepsilon} f(\varepsilon) = \grave{\alpha} g(\alpha)) = (\underset{}{\smile}^{\mathfrak{a}} f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})) \qquad \textbf{(V}$$ [134]

Ou em notação atual:

$$\nabla F = \nabla G \leftrightarrow \forall x(F(x) = G(x))$$

De acordo com Ferreira (2014):

> A Lei Básica V diz que dois conceitos têm a mesma extensão exatamente no caso em que ambos os conceitos são coextensivos (no sentido em que são verdadeiros dos mesmos objetos) (FERREIRA, F. Logicismo *in* Compêndio em Linha de Problemas de Filosofia Analítica, pg. 03).

Equinumericidade, conforme vimos anteriormente, é um contexto fundamental para Frege deduzir os números finitos na Aritmética, de forma a não dependerem de nada além de sua própria definição. De acordo com Frege, estabelecer a independência de

[133] O próprio Frege o faz explicitamente, tanto no Prólogo às *Leis Básicas da Aritmética*, quanto em outras passagens da mesma obra. Vide §0 – Exposition of Begriffschrift na tradução inglesa ou *Einleitung*, na edição alemã.

[134] Vide Grundgesetze der Arithmetik, §20.

um número não é o suficiente. É necessário que esse número seja reconhecido em conceitos diferentes nos quais ele seja atribuído em relação à extensão conceitual[135]. A equinumericidade foi a forma definida por Frege nos *Fundamentos da Aritmética* para determinar a identidade dos números. Essa instância extensional, oriunda da cardinalidade dos conceitos, nos permite dizer que cada conceito dá origem a um conjunto, que é a extensão de um conceito. Não apenas isso, também pode definir a relação de conjuntos pertencentes a outros conjuntos, uma vez que conceitos de segundo nível englobam conceitos de primeiro nível. Entretanto, como é sabido, Bertrand Russell (e também Ernst Zermelo) identificou uma inconsistência na Lei Básica V. O assim chamado paradoxo de Russell se desdobra exatamente sobre a totalidade de conjuntos mencionada acima. Dado o contexto de o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos, o resultado é o paradoxo que se tornou conhecido, expresso pela fórmula:

$$\exists X(\nabla X \in X \leftrightarrow \nabla X \notin X).$$

Na medida em que apresenta uma contradição no núcleo fundamental da equinumericidade, responsável pela determinação não apenas da identidade numérica de segundo nível, mas também pelo recurso que permite, no logicismo, estabelecer o princípio de igualdade entre conceitos mediante a extensionalidade, isso demonstrou que o sistema fregiano era inconsistente. Esse fato, por si só não implicaria o fim do logicismo, mesmo porque, de certa forma, o princípio da equinumericidade poderia ser deduzido mediante uma relação de segundo nível, indicada, como já fizemos, nos *Fundamentos da Aritmética*, por meio do princípio de Hume. De acordo com Heck (2013), na verdade, tanto os números finitos quanto o infinito, são deduzidos mediante relações de segundo nível nas *Leis Básicas*. Além da abordagem de Heck, Boolos (1944) e Gao (2011) sugeriram outras abordagens percebidas nas *Leis Básicas*.

[135] Conforme *Fundamentos da Aritmética*, §62 em diante.

Apesar disso, afirma-se que Frege tenha abandonado o projeto logicista após o paradoxo de Russell. O motivo que justificaria isso é indicado pelo próprio Frege na nota que ele apresenta no Apêndice B da segunda edição, em 1903, onde afirma:

> Mesmo hoje, não vejo como é que a Aritmética pode ser fundamentada cientificamente, como é que os números podem ser apreendidos como objetos lógicos e trazidos à consideração, se não for permitido – nem que seja condicionalmente – passar dum conceito para a sua extensão. Pode sempre falar-se da extensão dum conceito, duma classe? Se não, como é que se reconhecem as exceções?[136] (FREGE, G. Basic Laws of Arithmetic, Vol. 1 and 2, pg. 253).

Passar do conceito para a extensão, para Frege, é essencial para estabelecer as correlações entre conceito e objeto. Conforme observamos anteriormente, a identidade de um número é dada pelo operador de cardinalidade e pela colinearidade extensional de conceitos. Mas, se isso ocorre, é necessário ser possível haver uma notação que indique a generalidade da identidade das extensões, e é precisamente isso o que a Lei Básica V propicia. Em segundo lugar, uma vez que a função apresenta, como característica lógica permanente, a indefinição e insaturabilidade, um contínuo *manter-aberto* para a extensão, a infinitude de objetos que caem sob conceitos, independente de valores de verdade, requer, para que se configure como um conjunto infinito atual, que seja possível a formulação de um axioma que represente um conjunto de todos os conjuntos. De acordo com Bertrand Russell (1902), é precisamente o caráter indefinido da função que possibilita, mesmo torna necessária, a Lei Básica V, tornando possível a construção do paradoxo, pois, se poderíamos construir restrições aos conjuntos equinuméricos no núcleo da própria lei, o mesmo não pode ser feito, uma vez que é necessário existir a possibilidade de se conceber um conjunto de todos os conjuntos, ou um conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos, pois esse é o

[136] I do not see how arithmetic can be founded scientifically, how the numbers can be apprehended as logical objects and brought under consideration, if it is not---at least conditionally-permissible to pass from a concept to its extension. May I always speak of the extension of a concept, of a class? And if not, how are the exceptions to be recognised? (FREGE, G. Basic Laws of Arithmetic Vol. 1 and 2, pg. 253)

único caso que englobaria o infinito de forma absoluta e circunscrito ao fundamento analítico da Aritmética, bem como à função e seu caráter indefinido[137].

Entretanto, o processo que permite a Frege determinar o conjunto dos conjuntos, a classe das classes, fica comprometido pelo paradoxo de Russell. Acreditamos que o paradoxo de Russell não seria suficiente para derrubar os *Fundamentos da Aritmética* isoladamente[138]. Entretanto, se o logicismo se mostrar como um sistema dotado de incompletude ou, melhor dizendo, um sistema cujo infinito não pode ser expresso axiomaticamente, de maneira a demonstrá-lo como um infinito atual, uma série de problemas intransponíveis para Frege se interpõe ao logicismo. Primeiramente, um sistema lógico cujos infinitos conjuntos não podem ser reunidos sob um único conjunto superordenante não pode ser analítico, sendo obrigatoriamente de natureza sintética. Essa era a dicotomia de Leibniz, que só podia ser resolvida pela instância da mente divina. Mas em Frege, como dissemos, as infinitas relações deveriam encontrar seu limite no próprio sistema lógico, e isso era possibilitado mediante as relações lógicas de segunda ordem, e sua passagem para as relações de primeira ordem, que foram formalizadas pela Lei Básica V. Tomemos, como exemplo, a abordagem de Frege nos

---

[137] De acordo com Russell, em carta dirigida a Frege em 16/06/1902: On functions in particular (sect. 9 of your *Conceptual Notation*) I have been led independently to the same views even in detail. I have encountered a difficulty only on one point. You assert (p.17) that a function could also constitute the **indefinite element**. This is what I used to believe, but this view now seems to me dubious because of following contradiction: Let *w* be the predicate of being a predicate which cannot be predicated of itself. Can *w* be predicate of itself? From either answer follows its contradictory. (*in* The Philosophical and Mathematical Correspondence, pg. 130, grifo nosso).

[138] Nos *Fundamentos da Aritmética*, os dois princípios que fundamentam a identidade dos números, o Princípio de Hume e a colinearidade biunívoca dos percursos de valores leibniziana, não implicam o paradoxo na primeira instância da Lei Básica V. É somente quando aplicamos a estrutura de conjuntos à extensão conceitual que surge a possibilidade do paradoxo. De acordo com Boolos (1998): *Infelizmente, ele assumiu uma concepção ingênua de conjunto, na qual, para qualquer condição, existe um conjunto cujos elementos são tudo e apenas as coisas pelas quais essa condição se sustenta; e tal concepção leva à contradição quando aplicada à condição "é um conjunto que não é um elemento de si mesmo"* (Do original: Unfortunately, he assumed a naive conception of set, on which for any condition there is a set whose elements are all and only the things for which that condition holds; and such a conception leads to contradiction when applied to the condition "is a set that is not an element of itself.") (BOOLOS, G. Logic, Logic and Logic, pg. 03). Este é o caso quando necessitamos estabelecer um conjunto totalizante, que envolva todos os conjuntos, como é o caso do infinito atual.

Fundamentos da Aritmética a respeito do infinito. Como já dito anteriormente, Frege assume o infinito como estruturado no âmbito de *seguir uma série*. Dado esse ponto, Frege consegue deduzir cada um dos números naturais de forma axiomática. Quando se depara com o infinito, Frege o define como *o número capaz de suceder a si mesmo em uma série*. Tal número, o único possível, seria o infinito (∞) o que, na prática, consiste em uma definição que sucede a de números naturais. O problema é que, para que o infinito seja atual e concebido de forma analítica, necessitamos conceber o infinito como um conjunto que engloba todos os números naturais e a si mesmo. Se não houver um conjunto absoluto que envolva todos os demais, incluindo a si mesmo, a ideia de um infinito atual cai por terra, bem como o fundamento analítico da Aritmética. Em outras palavras, para resolver a situação faz-se necessária a Lei Básica V, bem como a formulação feita por Bertrand Russell sem que, no entanto, se caia no paradoxo. As formas de fazê-lo, no entanto, não são capazes de resolver a questão, pois não se estendem em explicar o infinito. Elas se concentram apenas no próprio paradoxo e na teoria dos conjuntos, sem correlacioná-la à necessidade interna desenvolvida pela ideia de infinito.

O itinerário que construímos até o momento teve como objetivo evidenciar a solução de Frege no sentido de fundamentar a Aritmética no âmbito dos juízos analíticos. Realizar essa empreitada levou Frege a fundamentar a Aritmética no domínio do enumerável e, radicado nesse domínio, passou a constituir o domínio objetivo não-efetivo. A enumerabilidade do pensável, na realidade, constitui a dimensão numérica da cardinalidade das relações de segundo nível aplicada sobre conceitos de primeiro nível. Essa cardinalidade caracteriza o domínio das extensões dos conceitos de primeiro nível. A articulação da enumerabilidade permite definir o modo de existência dos conceitos ao indicar a extensão finita ou infinita dos termos conceituais. Essa tessitura construída por Frege traz, no entanto, dificuldades de formalização e culminam em uma tensão em relação à indefinição e abertura de um *continuum* de pensamentos, que exige a formalização de um conjunto universal que englobe toda a potencialidade dos conceitos. Entretanto, em sua tentativa de formalização, a Lei Básica V, vimos que tal não é possível. Essa tensão produzida será explorada no próximo capítulo, onde analisaremos os últimos textos de Frege, nos quais ele revê a fundamentação da Aritmética e estabelece uma nova abordagem, não mais vinculada com as fontes analíticas do conhecimento, mas sim com o que ele denomina as fontes geométricas do conhecimento.

A partir de 1919, Frege retorna aos temas referentes aos *Fundamentos da Aritmética* e, apesar das indicações de inconsistência encontradas nas *Leis Básicas da Aritmética*, um conjunto de artigos parcialmente publicados indica que Frege ainda considerava válidos uma série de pressupostos previamente estabelecidos, o que parece incluir o domínio do enumerável.

Em contrapartida, alguns elementos parecem ser revistos e reestruturados pelo autor. Os juízos analíticos e sintéticos ganham correlatos mais amplos: a fonte lógica do conhecimento e a fonte geométrica do conhecimento, que se juntam à percepção sensível como formas das quais se originam todas as fontes possíveis de conhecimento.

Esse parece ser o primeiro movimento no sentido da reconstrução de uma nova hipótese de fundamentação da Aritmética. Essa nova hipótese nos parece justificar uma mudança na concepção fregiana a respeito da Aritmética: esta agora reivindicaria suas fontes do conhecimento à fonte geométrica. As implicações dessa afirmação aparentemente sugerem que Frege, ao longo de 1924, reconhece a natureza sintética *a priori* das relações aritméticas. De acordo com Frege:

> Quanto mais eu pensei sobre o assunto, mais me tornei convencido de que a aritmética e a geometria se desenvolveram na mesma base - uma geométrica de fato - de modo que a matemática em sua totalidade é realmente geometria. Somente nessa visão a matemática se apresenta como de natureza completamente homogênea [139] . (FREGE. G. Numbers and Arithmetic, pg. 277)

[139] The more I have thought the matter over, the more convinced I have become that arithmetic and geometry have developed on the same basis—a geometrical one in fact—so that mathematics in its entirety is really geometry. Only on this view does mathematics present itself as completely homogeneous in nature (FREGE. G. Numbers and Arithmetic, pg. 277).

Se a nova abordagem de Frege parece reconhecer a origem geométrica inerente à Aritmética, percebemos uma intenção mais ambiciosa em Frege, que consiste em propor uma espécie de teoria unificada da Matemática. E, nessa teoria, Frege erigirá um modelo que parece ampliar o domínio do enumerável, salvaguardar os pressupostos do logicismo e, indo além do que fora proposto originalmente, integrar nesse modelo tanto as agora denominadas *fontes lógicas do conhecimento* como as *fontes geométricas do conhecimento*.

Dessa forma, a partir dessa hipótese, pretende-se, no Capítulo 3, explorarmos as denominadas *Fontes do Conhecimento*. A seguir, verificaremos como Frege propõe a unificação da Matemática a partir da fonte geométrica, ao mesmo tempo em que afirma pressupostos do domínio do enumerável, presentes em 1884. Por fim, analisaremos a tentativa de Frege de construir um novo modelo para os *Fundamentos da Aritmética*, que conseguiria, pelo menos em tese, resolver os problemas oriundos da concepção de infinito que apresentamos no Capítulo 2 e que resultaram na impossibilidade de formulação nas *Leis Básicas da Aritmética*.

Capítulo 3 - Tentativas de Superar a Inconsistência no Logicismo

O paradoxo de Russell fora anunciado a Frege em carta escrita pelo próprio Bertrand Russell, em 1902. A solução apresentada por Frege no *Epílogo* de sua edição das *Leis Básicas* funcionava mais como um caminho superficial, uma restrição aplicada externamente à estrutura do logicismo. A abordagem de Frege então, consistia em considerar a hipótese de demarcar funções, de modo que ele inicialmente considera negar às classes, bem como aos percursos de valor, o *status* de objetos, e passa a tomá-los como *objetos impróprios*. Dessa forma, percursos de valor não poderiam ser considerados argumentos válidos para todas as funções de primeiro nível. De acordo com Frege:

> Se nós queremos revogar a lei do terceiro excluído para classes, nós poderíamos considerar tomar classes - e presumivelmente percurso de valor em geral - como objetos impróprios. Nesse caso, eles não seriam admissíveis como argumentos para todas as funções de primeiro nível. Haveria, no entanto, algumas funções que poderiam ter ambos, objetos próprios e impróprios, como argumentos[140]. (FREGE, G. Basic Laws of Arithmetic Vol. I and II, pg. 254)

O resultado dessa divisão, no entanto, resulta em uma infinita multiplicidade de espécies de relações entre objetos próprios e impróprios, de modo que objetos pertencentes a diferentes espécies poderiam não ocorrer como argumentos de mesma função. Entretanto, esse fato cria uma contradição direta com a posição de Frege de

[140] If we wanted to revoke the law of excluded middle for classes, we could consider taking classes-and presumably value-ranges in general-as improper objects. In that case, they would not be admissible as arguments for all first-level functions. There would, however, be some functions which could have both proper and improper objects as arguments (FREGE, G. Basic Laws of Arithmetic Vol. I and II, pg. 254).

que a relação de identidade se aplicaria indistintamente a objetos de quaisquer espécies[141].

Dessa forma, Frege não considera satisfatória a solução apresentada no *Epílogo*, de modo que, entre o período que se estendeu de 16 de junho de 1902 a 12 de dezembro de 1904, ele e Russell buscam solucionar o problema com outra possível abordagem. As tentativas de solução, no entanto, indicaram que o modo como Russell compreendia o logicismo era distinto de Frege, em pontos cruciais. É sabido que todas as tentativas de Russell não foram acatadas por Frege, e que todas as soluções apresentadas por outros pensadores, embora direcionadas a resolver o problema, não eram entendidas por Frege como soluções completas. Compreender o motivo das recusas de Frege nesse período nos auxiliará a compreender as peças que Frege apresentará aos poucos em seus últimos anos de vida como proposta para solucionar o problema. Também nos mostrará um pouco a respeito de como Frege compreendia alguns elementos do logicismo que não foram devidamente elucidados nos *Fundamentos,* de 1884, mas cujas concepções se mostraram fundamentadas nas *Leis Básicas da Aritmética*, de 1903.

Para Russell, o problema se encontra na estrutura da extensionalidade, e no modo como a equinumericidade é abordada. O problema, segundo ele, não se iniciou com Frege, e já fazia parte das questões que ele buscava, sem êxito, resolver. Ele demonstra dificuldades em compreender como, pela equinumericidade entre dois percursos de valor, identificamos a igualdade pela extensão, a menos que já saibamos que as extensões, no exemplo dado *u e v*, sejam percursos de valores. De acordo com ele:

> Se *u* e *v* não são percursos de valor, nós temos:

[141] De acordo com Frege: Identity is a relation given in so determinate a way hat it is inconceivable that different kinds of it occur. (FREGE, G. Grundgesetze der Arithmetic, pg. 254)

$$\neg\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\ \mathfrak{a} \frown u = \mathfrak{a} \frown v$$

> Porque ambos, $a \frown u$ e $a \frown v$ sempre significam o falso. Mas disso não podemos inferir $u = v$ pois então quaisquer dois objetos seriam idênticos desde que não fossem percursos de valores. Segue-se disso que *u não é, em geral, o percurso de valor da função* $—a \frown u$, mas somente se *u* é um percurso de valor[142] (RUSSELL, B. *In* Mathematical Correspondence, pg. 139).

Russell assume, a partir desse ponto, que só podemos inferir a igualdade de *u* e *v* se já soubermos que ambos são percursos de valores. Ele reconhece que não podemos pressupor uma relação um-para-um entre objetos e funções, mas considera que esse recurso, fundamental para Frege como forma de justificar a permanência de um valor numérico de segundo nível, possa ser explicada pela equinumericidade. Nesse processo, um dos pontos nos quais o logicismo encontra dificuldades, de acordo com o debate Russell-Frege, é a respeito da distinção entre igualdade. Equinumericidade diz respeito à equivalência de extensões de conceitos. Dois conceitos são considerados equinuméricos quando a extensão de objetos que caem sob eles é a mesma. Equivale a dizer que ambos os conceitos possuem as mesmas instâncias. Devemos considerar dois conceitos equinuméricos como iguais? Eles possuem identidade material? Em “Sobre o Sentido e a Referência”, Frege estabelece a igualdade entre conceitos a partir da equinumericidade de suas extensões, e explicitamente ignora os diferentes pensamentos que esses conceitos engendram. Os diferentes sentidos estão da ordem da lógica intensional, e vale dizer que, mesmo possuindo as mesmas instâncias, se os sentidos são diferentes, eles não serão iguais. Mas na lógica extensional, o sentido não é levado em conta, e sim sua estrutura formal. A igualdade entre dois conceitos passa por um critério difícil de ser aceito sem problemas por Russell: a equinumericidade entre

---

[142] If *u* and *v* are not ranges of values, we have $\neg\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\ \mathfrak{a} \frown u = \mathfrak{a} \frown v$ because both $a \frown u$ and $a \frown v$ always mean the false. But from this we cannot infer $u = v$, for then any two objects would be identical as long as they were not ranges of values. It follows from this that *u* is not in general the range of values of the function $—a \frown u$, but only if *u* is a range of values (RUSSELL, B. *In* Mathematical Correspondence, pg. 139).

os percursos de valores dos conceitos. De modo geral, faz sentido a abordagem de Frege, pois a identidade de um conceito encontra-se relacionada com a enumerabilidade do mesmo, em relação ao número de objetos que caem sob ele. E a igualdade entre dois conceitos segue o princípio de Leibniz, no qual dois conceitos são considerados iguais se o percurso de valor deles for igual. Mas a objeção de Russell em carta datada de 24 de julho de 1902 denota perplexidade em conseguir perceber essa igualdade em todas as condições possíveis de aplicação do axioma. De acordo com Russell:

> E, em geral, se conectamos percursos de valores proximamente com conceitos, como você faz, parece duvidoso que dois conceitos com a mesma extensão tenham os mesmos percursos de valores ou somente percursos de valores equivalentes[143] (Russell, B. in Mathematical correspondence, pg. 139).

Em outras palavras, o que Russell evidencia como um problema é que, para definirmos o critério de igualdade por colinearidade de valores, seria necessário haver uma relação um-para-um entre todos os objetos e todas as funções. À questão da extensionalidade, soma-se o problema atinente aos conjuntos serem vistos como ‘totalidades’ que não parecem se integrar de forma harmoniosa com os percursos de valores. A ideia de ‘totalidade’ não aparece apenas nessa abordagem de Russell. Já na primeira carta, na qual ele apresenta o paradoxo a Frege, o “conjunto no qual todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos” é entendido como uma totalidade:

> Da mesma forma, não há classe (como um todo) daquelas classes que, como totalidades, não são membros de si mesmas. Daí concluo que, sob certas circunstâncias, um conjunto definível não

[143] And in general, if one connects ranges of values closely with concepts, as you do, it seems doubtful wheter two concepts with the same extension have the same range of values or only equivalent ranges of values (Idem).

> forma um todo[144]. (RUSSELL, B. in The Philosophical and Mathematical Correspondence, pg. 131)

A ideia de que uma classe constitui um todo se ramifica nas cartas seguintes, e demonstra que, ao adentrar nas concepções a respeito da fundamentação das relações entre os números, segue para um caminho distinto de Frege. Em carta de 10 de julho de 1902, Russell expressa sua concepção de classe e como ela se comporta em relação à extensão de objetos, bem como ao percurso de valor que ele traça:

> Uma classe que consiste em mais de um objeto é, em primeiro lugar, não um objeto, mas muitos. Agora, uma classe ordinária forma um todo; assim, soldados, por exemplo, formam um exército. Mas isso não parece ser uma necessidade do pensamento, embora seja essencial se quisermos usar uma classe como nome próprio. (RUSSELL, B. idem, pg. 137)[145]

O modo como Russell entende as classes e conjuntos assemelha-se ao modo de Cantor, ao considerar as extensões como conjunto de objetos que possuem uma posição ordinal, dotados de uma enumeração por sucessão, o que o leva a entender o todo como a soma das partes que, enquanto partes, possuem as características constituintes do todo. Considerar a extensionalidade dessa forma inevitavelmente nos conduz a pensar que as extensões e objetos são os maiores causadores das confusões e inconsistências, ao atribuir-lhes nomes próprios que representam classes e que, por consequência, cairão sob a inconsistência da lei básica V.

Em carta datada de 24 de julho de 1902, Russell expressa suas dificuldades em compreender as relações entre percurso de valor, extensionalidade e conceitos:

---

[144] Likewise, there is no class (as a whole) of those classes which, as wholes, are not members of themselves. From this I conclude that under certain circumstances a definable set does not form a whole (Idem, pg. 131).

[145] A class consisting of more than one object is in the first place not *one* object but many. Now an ordinary class does form *one* whole; thus soldiers for example form an army. But this does not seem to me to be a necessity of thought, though it is essential if we want to use a class as a proper name (Idem, pg. 137).

> Acho difícil ver o que realmente é uma classe, se ela não consiste em objetos, mas deve ser a mesma para dois conceitos com a mesma extensão (...) Cada dia eu entendo menos o que realmente se entende por 'extensão de um conceito'. Mas, ao discutir suas opiniões, não gostaria de levantar objeções injustificadas, e é por isso que me permito questioná-lo sobre os pontos mais difíceis[146]. (Ibidem, pg. 139)

As dificuldades indicadas por Russell se devem ao fato de que, para se considerar dois nomes próprios como classes iguais, elas devem ser o todo de conjuntos com as mesmas partes, com os mesmos significados. Embora Russell compreenda as justificativas de Frege, não lhe parece possível asserir a igualdade entre duas extensões sem que se conheça antecipadamente esses percursos e, ao fazê-lo, o que necessita sempre recorrer ao próprio conceito para isso e, em contrapartida (ao se recorrer ao conceito), deve-se antes analisar os percursos de valor. Para Frege, no entanto, o problema encontrado por Russell não se justifica. A dificuldade de Russell, segundo Frege, consiste no fato de que ele confunde sistema com classe. Um sistema, de acordo com Frege, é mantido e sustentado por relações internas que, se dissolvidas, põe por terra o próprio sistema. É o caso de um todo formado por partes compósitas, como um exército ou um povo. Nesse caso, mesmo que os indivíduos permaneçam, se for destruída a relação que os mantém unidos ao sistema, este deixará de existir. O mesmo não pode ser dito de uma classe. Esta, diferente de um sistema, possui membros que se encaixam nos limites de suas definições. Nesse sentido, em um sistema, as partes de uma companhia seriam os regimentos, e as partes destes seriam os soldados individuais. Em contrapartida, uma classe de companhias, por sua definição, só contém companhias. Ainda de acordo com Frege, se as partes de uma totalidade são materiais, esse todo será material. Enquanto que, em uma classe, mesmo que seus membros sejam materiais, ela sempre será lógica, conceitual, e sua relação com esses membros também será lógica, de modo que eles caem sob ela. Dessa forma, uma classe será igual a outra classe se os objetos que caem sob ambas

[146] I find it hard to see what a class really is if it does not consist of objects but is nevertheless supposed to be the same for two concepts with the same extension. (...) Every day I understand less what is really meant by ´extension of a concept´. But in discussing your views, I should not like to bring up any unjustified objections, and this is why I permit myself to question you on the most difficult points (Idem, pg. 139).

forem os mesmos[147]. Enquanto que, em um sistema, dificilmente poderemos dizer que um todo é igual a outro sem conhecermos todas as partes que o formam, em todos os seus níveis de relações internas, algo que só poderia ser possível se pudéssemos correlacionar cada objeto com uma função, em uma relação um-para-um, e daí a dificuldade de Russell em compreender a relação de classes concebida por Frege.

Em carta datada de 28 de julho de 1902, Frege utiliza a mesma abordagem que utilizara em 1874, nos *Fundamentos da Aritmética*, ao se explicar a distinção de sua noção de conjunto em relação à de Cantor, sendo a de Frege fundamentada no paradigma de “série”, enquanto que Cantor utilizava o de “sucessão”. A grande diferença entre essas abordagens, é que seguir uma série não implica uma aglomeração em sequência, como se a sucessão a outro número fosse atributo dos números, enquanto que a ideia de sucessão implica exatamente isso, uma aglomeração de números que necessariamente se seguem uns dos outros. A diferença é fundamental. Uma série, para Frege, é composta por objetos, cada um dos quais uma unidade independente, e eles não fazem parte de um todo. Entretanto, quando concebemos uma classe como sucessão, isso implica que cada elemento é uma parte do todo, de forma que se o todo é removido, as partes também o são. Nesse caso, Frege pondera, não estamos falando de uma classe, mas sim de um todo, ou um sistema. Uma extensão de um conceito corresponde a uma série, onde cada objeto é independente um do outro. Entretanto, um pensamento é um todo, maior do que suas partes, mas dependente delas, assim como elas dependem do todo. Como Frege afirma, uma das principais características da sucessão, como o próprio termo sugere, é a relação entre as partes. Essa relação, na formação do pensamento, é definida por Frege pelo princípio de contexto. É um traço característico da lógica intensional. Porém, em contrapartida, a relação extensional entre conceito e objeto é a de uma série e, como tal, se estrutura em conformidade com o princípio de composicionalidade, formando uma classe. Lembramos que, ao estruturar o domínio do enumerável, Frege alocou toda a relação do logicismo na lógica extensional e, quando ele estabelece a

[147] Conforme carta de Frege a Russell, de 28.07.1902. Vide Posthumous Writings, pg. 139-141).

identidade entre conceitos, ele o faz pela lógica extensional, o que o faz atuar no paradigma de seguir uma série e de não trabalhar, nesse aspecto, com a ideia do todo. Mais uma vez, Frege estabelece uma distinção de níveis sobre a linguagem. De um lado, a relação extensional entre conceito e objeto é analítica, suas relações são distantes das relações de significado da lógica intensional. E esta, todavia, atua quando analisamos os sentidos, os pensamentos propriamente ditos.

Um ponto definitivo para explicar o movimento de Frege para contextualizar a aritmética no fundamento lógico é reforçado nessa carta. Frege apresenta ainda uma distinção fundamental entre sistema e classe. Em um sistema, as partes que formam o todo possuem a mesma natureza que esse todo:

> A classe de átomos que forma a cadeira – diz Frege – na qual eu estou sentado não é a própria cadeira. Um todo cujas partes são materiais é ele próprio material; por outro lado, eu não poderia chamar uma classe como um objeto físico, mas um (objeto) lógico[148]. (FREGE, G. Mathematical Correspondence, pg. 140).

Percebemos daí a natureza dual em que as sentenças podem ser consideradas. Uma classe de átomos pode ser considerada como partes de um sistema cujo todo é a cadeira. Mas, nesse caso, eles serão tomados em seu sentido material, inclusive o de sua apreensão no tempo e no espaço. Mas, considerados como classe, em suas relações puramente lógicas, serão considerados como percurso de valor. Frege finaliza:

> Eu mesmo fui muito relutante para reconhecer percursos de valores e, consequentemente, classes; mas eu não vi outra possibilidade de posicionar a aritmética em um fundamento lógico[149].(Idem, pg. 141).

O modo como Frege concebe isso, ele mesmo enuncia para Russell, no que retoma a observação anterior presente no *apêndice* das *Leis Básicas da Aritmética, Parte 2*:

[148] The class of atoms that form the chair on which I am sitting is not the chair itself. A whole whose parts are material is itself material; on the other hand, I wold not call a class a physical object but a logical one (Idem, pg. 140).

[149] I myself was long reluctant to recognize ranges of values and hence classes; but I saw no other possibility of placing arithmetic on a logical foundation (Idem, pg. 141).

> Mas a questão é, como nós apreendemos objetos lógicos? E eu não encontrei outra resposta que essa, nós os apreendemos como extensões de conceitos, ou mais geralmente, como percursos de valor de funções[150]. (idem).

Frege, por fim, conecta essa explicação com sua abordagem nos *Fundamentos da Aritmética*:

> (...) mas não devemos, então, considerar as classes como sistemas; pois o portador de um número, como mostrei em meus *Fundamentos da Aritmética,* não é um sistema, um agregado, um todo consistindo de partes, mas um conceito, para o qual podemos substituir a extensão de um conceito[151]. (idem).

Uma vez que o portador de um número é um conceito, isso significa, conforme dissemos anteriormente, que apenas o conceito é detentor dos números como propriedade, que atesta a cardinalidade desse conceito, ao indicar suas instâncias. Ainda nessa carta, Frege explicita o nível em que se encontram as dificuldades de Russell. De forma básica, Frege reduz os problemas a dois, que já foram mencionados por nós: por uma ilusão da linguagem, confundimos relações de primeiro nível com segundo nível; e confundimos relações lógicas com relações do mundo dos significados. Abaixo, citações diretas de Frege sobre ambos os pontos:

> A dificuldade na proposição 'Uma função nunca toma o lugar de um sujeito' é somente aparente, ocasionada pela inexatidão da expressão linguística; pois as palavras 'função' e 'conceito' deveriam, propriamente falando, ser rejeitadas. Logicamente, elas deveriam ser nomes de funções de segundo-nível; mas elas apresentam a si mesmas linguisticamente como nomes de funções de primeiro-nível[152]. (idem)

[150] But the question is, How do we apprehend logical objects? And I have found no other answer to it than this, We apprehend them as extensions of concepts, or more generally, as ranges of values of functions (Idem).

[151] (...) but we must not then regard classes as systems; for the bearer of a number, as I have shown in my *Foundations of Arithmetic,* is not a system, na aggregate, a whole consisting of parts, but a concept, for a which we can substitute the extension of a concept (Ibidem).

[152] The difficulty in the proposition ´A function never takes the place of a subject´ is only na apparent one, occasioned by the inexactness of the linguistic expression; for the words ´function´ and ´concept´ should

Dessa forma, a procura por desvencilhar-se das dificuldades linguísticas conduz-nos a um processo de análise do pensamento, em seus níveis e elementos mais básicos da proposição:

> A análise da proposição corresponde a uma análise do pensamento, e isso, por sua vez, corresponde a algo no reino dos significados, e eu gostaria de chamar isso de um fato lógico primitivo. Isso é precisamente porque nenhuma definição própria é possível aqui[153]. (Idem, pg. 142)

Esse ponto é de suma relevância para Frege, de modo a justificar sua relutância em encontrar uma solução para o paradoxo de Russell. Existem, pelo menos, três formas alternativas que possibilitariam justificar o logicismo independentemente do Axioma V das *Leis Básicas da Aritmética*. Uma das mais defendidas é o emprego do Princípio de Hume; a segunda consiste na abordagem leibniziana fundamentada no princípio dos indiscerníveis e, por fim, a abordagem de Russell, que resultará, em sua própria filosofia, na construção da teoria dos tipos.

Como pudemos observar até o momento, a recusa de Frege em aceitar o caminho proposto por Russell se fundamenta em uma dificuldade que ele buscava resolver desde 1884, e que o fez recusar também o argumento do Princípio de Hume, que consiste na necessidade de assegurar o princípio de identidade para as extensões. Trataremos dessa abordagem a seguir, pois as dificuldades que ela encerra, e que se expressam pela chamada *objeção de Júlio César*, justifica o caminho de Frege até a concepção da Lei Básica V e, em contrapartida, parece-nos estar profundamente relacionada com sua tentativa final de construir uma nova fundamentação da aritmética, em meados de 1924.

---

properly speaking be rejected. Logically, they should be names of second-level functions; but they present themselves linguistically as names of first-level functions (Ibidem).

[153] The analysis of the proposition corresponds to an analysis of the thought, and this in turn to something in the realm of meanings, and I should like to call this a primitive logical fact. This is precisely why no proper definition is possible here (Idem, pg. 142).

O empenho de Frege em encontrar uma definição de número nos *Fundamentos da Aritmética* passou por um processo extensivo de desenvolvimento no qual, primeiramente, ele rejeita as abordagens empiristas e psicologistas a respeito dos números. Mais difícil, como vimos, consistiu em construir um caminho pelo qual os números poderiam ser apreendidos independentemente da intuição. Números não seriam predicados de algo, não seriam propriedade de algo, mas sim objetos lógicos saturados em si mesmos. Dessa feita, números podem ser empregados, mediante proposições supervenientes, para enunciar a cardinalidade de conceitos, enumerando um conjunto limitado de extensões para os conceitos, expressos na forma *o número que pertence ao conceito F*.

É a partir da inversão do enunciado acima que Frege extrai um conjunto de definições a respeito dos números. Dessa forma, ao dizer que a um conceito convém o número O, se valer universalmente, para qualquer *a*, a proposição de que *a* não cai sob este conceito, estabelece como zero toda extensão vazia de conceitos. Por esse procedimento, Frege define os demais números, estabelecendo parâmetros extensionais para defini-los.

O desafio que se coloca para Frege, a partir do § 57 dos *Fundamentos*, consiste em determinar a identidade unívoca dos números. Pela abordagem apresentada acima, Frege levanta o fato de que nada se determinou a respeito da continuidade da identidade dos números. Embora Frege reconheça a independência dos números enquanto objetos, é necessário, como critérios de identidade, que eles sejam reconhecidos em suas aplicações nos diferentes sentidos dos enunciados. Não obstante, não é possível, pela definição dada, reconhecer o mesmo número em suas diversas aplicações. Devido a isso, Frege levanta a *objeção de Júlio César*, que é a de fixar a identidade de extensões em relação a outros objetos. A passagem é bem conhecida e objeto de intenso debate:

> Mas por meio de nossas definições nunca poderemos decidir — para dar um exemplo grosseiro — se a um conceito convém o número Júlio César, se este famoso conquistador das Gálias é ou

> não um número[154]. (FREGE, G. Os *Fundamentos da Aritmética*, §56).

Uma segunda etapa consiste em empregar outro enunciado que permita estabelecer uma identidade sobre os números. A opção apresentada é conhecida como Princípio de Hume, pelo qual, se dois números apresentarem as mesmas unidades correspondentes, eles serão iguais. Temos, dessa forma, o critério de comparação de unidades das extensões de conceitos como parâmetro. Porém, essa abordagem ainda não é o suficiente para resolver o problema, de modo que Frege apresenta uma variante consistente da objeção de Júlio César:

> Mas este meio não atende a todos os casos. Ele não permite decidir, por exemplo, se a Inglaterra é o mesmo que a direção do eixo da Terra. Perdoe-se este exemplo aparentemente absurdo! Naturalmente, ninguém confundirá a Inglaterra com a direção do eixo da Terra; mas este não é um mérito de nossa definição[155]. (FREGE, G. *Fundamentos da Aritmética*, § 66).

Por fim, Frege recorre ao princípio de conceitos equinuméricos de Leibniz, pelo qual dois conceitos, possuindo a mesma extensão de objetos caindo sob elas, uma vez preservado seu valor de verdade, são consideradas idênticas (*Eadem sunt quorum unum potest substitui alteri salva veritate*).

Esse movimento é importante em todo o logicismo, pois o principal critério para definir a igualdade entre as extensões de conceitos passa a depender de dois fatores: a cardinalidade de cada conceito, o que indica a igualdade quantificada das extensões de conceitos, e a identidade entre percursos de valores, pelo pareamento de valores verdadeiros (ou falsos) entre as extensões.

[154] Aber wir können — um ein krasses Beispiel zu geben — durch unsere Definitionen nie entscheiden, ob einem Begriffe die Zahl Julius Caesar zukomme, ob dieser bekannte Eroberer Galliens eine Zahl ist oder nicht (FREGE, G. Die Grundlagen der Arithmetik, §56).

[155] Aber dies Mittel reicht nicht für alle Fälle aus. Man kann z. B. Danach nicht entscheiden, ob England dasselbe sei wie die Richtung der Erdaxe. Man verzeihe dies unsinnig scheinende Beispiel! Natürlich wird niemand England mit der Richtung der Erdaxe verwechseln; aber dies ist nicht das Verdienst unserer Erklärung (FREGE, G. Die Grundlagen der Arithmetik, §66).

É somente em 1893, nas *Leis Básicas da Aritmética*, que Frege estruturá o conjunto axiomático para formalizar a abordagem da equinumericidade entre as extensões de conceitos. Essa equinumericidade se assenta, nas Leis Básicas, em dois pressupostos. O primeiro e mais conhecido deles, como já discutimos anteriormente, é o Axioma V (Lei Básica V). O segundo, particularmente importante para nós, se encontra no §10 das *Leis Básicas da Aritmética*, e que estabelece o princípio de permutação entre percursos de valores e valores de verdades como extensões de conceitos.

Primeiramente, Frege estabelece o axioma que formaliza a equinumericidade entre conceitos, mediante a equipolência de percursos de valores. Seguindo aqui a definição extraída em “Sobre Conceito e Objeto”, valores de verdade *o verdadeiro* e *o falso* constituem-se como objetos, de forma que um percurso de valor também pode ser tomado como nomes de conceitos, assim como o conjunto extensional do mesmo. Além disso, Frege adota, para esse fim, cada conjunto extensional ou percurso de valor como um conjunto, de fato. Dessa forma, cada conceito implica um conjunto domínio de extensões e percursos de valores. Assim sendo, dois conjuntos de objetos pertencentes a diferentes conceitos serão considerados verdadeiros se o f(x) for o mesmo para cada um dos objetos tomados como argumentos em cada conceito. O problema nessa primeira abordagem, é que não há como determinar quais seriam as referências se o conjunto extensional for composto por percursos de valores, permanecendo assim indeterminados. Dessa forma, embora seja uma abordagem mais complexa do princípio de identidade de Leibniz, no conjunto de Frege, continuamos a encontrar o problema da fixação de identidades quando não conhecemos de antemão todos os objetos e seus valores de verdade em uma extensão de conceitos, problema que já indicamos na abordagem de Russell. Dessa forma, de acordo com Ruffino (2002):

> Em seguida, o sistema formal de GGA é verdadeiro para os objetos da imagem de X(x) se for verdadeiro para os objetos de seu domínio, uma vez que, para quaisquer dois percursos de valores Ėf(E) e Ėg(E), X(Ėf(E)) e X(Ėg(E)) são os mesmos apenas no caso f(x) e g(x) concordar com cada objeto como argumento. Portanto, o Axioma V não pode garantir que a referência de termos de percurso de valor como '(Ėf(E))' é o pretendido (isto é, o percurso de valor de f(x) e não X((Ėf(E))) para alguns X(x) especificado como acima. A referência dos termos do percurso de

> valor é, portanto, indeterminada pelo sistema formal de GGA[156]. (Ruffino, pg.126)

Ciente dessa situação, Frege elabora a segunda etapa de seu artifício para determinar as identidades persistentes de conceitos no §10 das *Leis Básicas da Aritmética*. Desenvolve, nesse curto parágrafo, o princípio da permutação. Esse princípio determina uma espécie de recorte local das funções que apresentam percursos de valores como argumentos. Nesses recortes específicos, determina-se, ao introduzir cada função, o valor a ser assumido para os percursos de valores como argumentos, bem como para todos os demais argumentos pertencentes a esses recortes. Assim, se de antemão fixarmos os valores de verdade de x = y, por exemplo, para percursos de valor como argumentos, estaria garantido, nesse recorte específico, a persistência da identidade dos percursos de valores. Esse artifício não seria válido para todas as demais circunstâncias, como extensões de conceitos. Para esses casos, vale o procedimento da *Lei Básica* V.

Nesse caso, concordamos com Ruffino que a abordagem de Frege no princípio de permuta consiste muito mais apropriadamente como um caso especial do princípio de identidade de Leibniz do que uma generalização do princípio de contexto.

Essa seria uma versão local e não generalizada da aplicação extrínseca da mente divina leibniziana conhecendo, sem se valer da intuição, a identidade extensional entre os elementos de um conceito. É uma solução local e só aplicável quando temos percursos de valores como argumentos, mas ainda assim, pode-se indagar como, em todos os casos possíveis de combinações de percursos de valor, seria possível fazer a permuta.

De acordo com o princípio de Leibniz, dois objetos são idênticos se e somente se cada função tiver o mesmo valor para ambos os argumentos. Mas isso exige que, se a

[156] Then the formal system of GGA is true of the objects of the image of $\chi(x)$ if it is true of the objects of its domain, since for any two value-ranges $\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$ and $\grave{\varepsilon}g(\varepsilon)$, $\chi(\grave{\varepsilon}f(\varepsilon))$and $\chi(\grave{\varepsilon}g(\varepsilon))$are the same just in case $f(x)$ and $f(x)$ agree for any object as argument. Hence, Axiom V cannot guarantee that the reference of value-range terms like '$(\grave{\varepsilon}f(\varepsilon))$'is the intended one (i.e., the value-range of *f*(x) and not $\chi((\grave{\varepsilon}f(\varepsilon))$) for some $\chi(x)$ specified as above. The reference of value-range terms is, therefore, underdetermined by the formal system of GGA.

identidade de quaisquer dois objetos for determinada na relação entre eles, os valores assumidos por quaisquer dos dois objetos como argumentos também são determinados. E, consequentemente, a referência de um termo de percurso de valor é distinguível da referência de outro nome somente se alguma função de primeira ordem pressupor valores diferentes para ambos os objetos. Isso requer que para cada função de primeiro nível, seus valores sejam determinados para percursos de valor e para valores de verdade como argumentos.

A determinação de variação de valores proposta por Frege se estende até a função. Frege afirma:

> Com isso, determinamos os percursos de valor tanto quanto possível aqui. Se houver uma outra questão de introduzir uma função que não é redutível às funções conhecidas até agora, então, neste caso, devemos determinar qual valor deve ter para percursos de valor como argumentos; e isso pode ser visto como uma determinação de percursos de valor até a própria função [157]. (FREGE. G. *Leis Básicas da Aritmética*, §10).

Entretanto, diante dos elementos apresentados, os problemas que Frege enfrenta em relação à fixação da identidade numérica persiste, só podendo ser resolvido de maneira determinista, mediante a estipulação de valores dados. Salvo nesse caso, continua não sendo possível determinar a persistência de cada elemento de primeira ordem da extensão dos conceitos. Tampouco continua sendo possível distinguir *Júlio César* de um número, ou mesmo de um percurso de valor.

3.1. O Revisionismo da Fundamentação da Aritmética

[157] We have hereby determined the value-ranges as far as is possible here. Only when the further issue arises of introducing a function that is not completely reducible to the functions already known will we be able to stipulate what values it should have for value-ranges as arguments; and this can then be viewed as a determination of the value-ranges as well as of that function (FREGE, G. Basic Laws of Arithmetic, Vols. I and II, §10).

O percurso de Frege que apresentamos partiu do pressuposto de que a fundamentação da aritmética sob leis lógicas pressupunha uma herança leibniziana de construção analítica das relações aritméticas. Entretanto, Leibniz não intentou encontrar um espaço lógico que abarcasse todas as relações entre os elementos do mundo sob a égide dos juízos analíticos, e tampouco um espaço que abarcasse a infinitude de relações. O espaço concebido por Leibniz foi a própria mente divina, uma instância extrínseca à dinâmica das leis lógicas do pensamento. Estabelecer o logicismo, no entanto, a partir de uma dinâmica estritamente lógica, como propôs Frege, apresentou um conjunto de desafios, dentre eles a construção de um espaço lógico que permitisse demonstrar o fundamento analítico das relações numéricas e do próprio pensamento. Também era necessário demonstrar a independência dessas relações de quaisquer fontes originadas pela intuição ou pela sensibilidade do espaço. Ainda, se fez necessário mostrar como seria possível o fundamento analítico da aritmética resultar em uma fonte profícua de conhecimentos. Por fim, era necessário que tal espaço abrangesse a infinitude sem que, no entanto, uma solução externa aos próprios meandros da lógica tivesse de ser envolvida. E, acima de tudo, pairava a necessidade de assegurar a persistência da identidade dos números (e, por contiguidade, dos pensamentos) de forma intemporal.

A solução de Frege, fundamental para a construção do logicismo, radicou-se em três pontos fundamentais. Primeiramente, as relações de segunda ordem permitiram a Frege estabelecer uma lógica das relações entre os elementos que passam a compor logicamente os enunciados: conceitos e objetos. Em segundo lugar, estabeleceu instâncias muito bem definidas nas quais os enunciados se categorizam: domínio objetivo efetivo, objetivo não-efetivo e subjetivo. E, em terceiro lugar, estabeleceu o domínio globalizante de todas as instâncias de enunciados nas relações de segundo nível, mediante o domínio do enumerável. No entanto, a solução de Frege não foi capaz de estabelecer a persistência da identidade numérica de forma lógica sem que, com isso, seu sistema se mostrasse inconsistente.

Entretanto, a partir de 1923, Frege inicia um conjunto de artigos não publicados, que culminam em um de seus últimos trabalhos, nomeado posteriormente de “A New Attempt at a Foundation for Arithmetic” (1924-25), e que apresenta a proposta de um projeto de natureza revisionista a respeito da tentativa inicial de Frege, que começara em 1884, com os *Fundamentos da Aritmética*, tivera seu ponto máximo de desenvolvimento em 1893, com as *Leis Básicas da Aritmética*, seu plano crítico em 1902, com a descoberta do paradoxo de Russell e que agora, em 1924, ele buscava reestruturar.

Seguiremos um itinerário traçado pelos escritos póstumos de Frege, todos eles datados de 1923 a 24, e todos construindo um arco em torno do infinito e do fundamento geométrico da matemática. Seguiremos esta rota porque, se o pensamento possui estrutura similar aos números, compartilhando de suas leis, conforme Frege afirmara nos *Fundamentos*, é fato então que eles também se defrontarão com o infinito, e possivelmente, as mesmas dificuldades encontradas em relação à aritmética se dê também com o pensamento.

Em 1924, no escrito conhecido como “Diary Entries on the Concept of Numbers”, Frege inicia alegando que todas as suas tentativas em elucidar o significado de número resultaram em falha. O erro dos matemáticos, que já remontava na crítica de Frege desde 1884, quando ele escreveu os *Fundamentos da Aritmética*, é que ainda persistia o engano, produzido pela linguagem, em interpretar os números como objetos sensíveis caindo sob um conceito. O número não é uma coisa concreta. Tampouco pode ser um agregado de coisas. Termos numéricos e numerais não são nomes próprios de objetos efetivos, assim como termos como "número primo" e "número inteiro" não correspondem a termos conceituais.

Frege afirma:

> Mas encontramos entre eles as mais diferentes e contraditórias afirmações acerca de número e números. De fato, quando alguém se ocupa dessas perguntas por muito tempo, suspeita-se que nossa maneira de usar a linguagem é enganosa, que termos numéricos não são nomes próprios de objetos e palavras como

'número', 'número quadrado' e o resto não são termos conceituais; e que, consequentemente, uma sentença como "Quatro é um número quadrado" simplesmente não expressa que um objeto está subsumido em um conceito e, portanto, simplesmente não pode ser interpretado como a sentença "Sirius é uma estrela fixa". Mas como eles também devem ser interpretados? (FREGE, G. Diary Entries on the Concept of Numbers, p.263).[158]

Para Frege, existe um imenso engano produzido pelo uso da linguagem, na qual sua ambiguidade nos leva a estabelecer as relações entre os números como relações de subsunção entre objetos e conceitos. Um exemplo é quando dizemos que *O número quatro é um número quadrado*. Frege afirma que a expressão “o número quatro" não implica um objeto sensível. Números não consistem em uma coleção. De qualquer forma, o erro apontado por Frege é que, ao considerar números como parte de uma coleção, estes passam a ser considerados como coisas, cujas quantidades podem ser agrupadas de forma agregativa e passam a exigir certa demonstração material. Um problema que conduz a um engano, o de considerar que números se confundem com numerais.

A crítica de Frege nesse registro é estendida no escrito de setembro de 1924, “Numbers”, no qual o autor parte do mesmo ponto inicial, a crítica à concepção errônea que os matemáticos carregam a respeito dos números. Sua insistência em igualar os números com numerais se dá devido à necessidade de implicação material que o uso da linguagem acaba por impor sobre a compreensão de número, por defini-lo como nome próprio. Numerais e termos numéricos precisam ser entendidos como signos que designam um número.

[158] But one finds amongst them the most different and contradictory statements about number and numbers. Indeed, when one has been occupied with these questions for a long time one comes to suspect that our way of using language is misleading, that number-words are not proper names of objects at all and words like ‘number', ‘square-number' and the rest are not concept-words ; and that consequently a sentence like ‘Four is a square number' simply does not express that an object is subsumed under a concept and so just cannot be construed like the sentence ‘Sirius is a fixed star'. But how them is it too be construed? (FREGE, G. Diary Entries on the Concept of Numbers, p.263).

> Então numerais e termos numéricos terão o mesmo papel, nomeadamente aquilo que designa um número; somente o veículo usado será diferente[159]. (FREGE, G. Numbers in Posthumous Writings, pg. 265)

Os números, portanto, não são os numerais que os designam, ainda que na linguagem eles assumam a mesma forma de nomes próprios de coisas. Os números designados pelos numerais e termos conceituais são entidades lógicas, não sensíveis, não perceptíveis pelos sentidos. Nem mesmo quando falamos em termos geométricos, como pontos, linhas retas, superfícies, os números empregados não são objetos sensíveis, ainda que sejam designados por termos numéricos que remetem a conceitos, como *número primo*.

Quando dizemos *Cinco é um Número Primo*, não estamos dizendo que o objeto cinco está subsumido ao conceito *número primo*, uma vez que ambas as designações indicam a mesma coisa. Numerais designam números, como nomes designam referências, mas não se confundem com elas. No entanto, Frege afirma que, o que quer que os numerais designem, não é algo percebido pelos sentidos. Na verdade, nem mesmo os objetos da geometria seriam percebidos pelos sentidos. Frege afirma:

> Nem mesmo os objetos da geometria, pontos, linhas retas, superfícies, etc., podem ser realmente percebidos pelos sentidos[160]. (FREGE. G., Numbers, in Posthumous Writings, 266)

A essa situação dificilmente se pode fazer algo, pois nossa própria linguagem nos leva a pensar em termos de percepção sensível ao tratar os números como nomes próprios, designando algo. Frege retoma a desconfiança sobre a linguagem, mas agora encontra raízes mais profundas em sua estrutura, de maneira que sua ambiguidade é vinculada

---

[159] Then numerals and number-words will have the same role, namely that of designating a number; only the vehicle used will be different (FREGE, G. Numbers in Posthumous Writings, pg. 265).

[160] Even the objects of geometry, points, straight lines, surfaces etc. cannot really be perceived by the senses (Idem, pg.266).

não apenas ao uso geral que dela fazemos, mas sim porque ela se encontra diretamente vinculada à percepção sensível.

Em “Sources of Knowledge of Mathematics and natural Sciences”, de 1924, Frege visa demonstrar as ameaças e limites que as fontes de conhecimento possuem e, de forma semelhante às inquirições de 1884, busca estruturar essas fontes. Porém, aos termos juízos analíticos, sintéticos a *priori* e a *posteriori*, Frege introduz uma abordagem diferente:

> Um conhecimento se dá quando um pensamento é reconhecido como verdadeiro. Desse modo, o pensamento deve, antes de mais nada, ser apreendido. Contudo, não considero a apreensão do pensamento como conhecimento, mas apenas o reconhecimento de sua verdade, o juízo propriamente dito. Por fonte de conhecimento entendo o que justifica o reconhecimento da verdade, o juízo.
>
> Distingo as seguintes fontes de conhecimento:
>
> 1. A percepção sensível.
>
> 2. A fonte lógica de conhecimento.
>
> 3. A fonte geométrica de conhecimento e a fonte temporal de conhecimento [161] . (FREGE, G. Sources of Knowledge of Mathematics and natural Sciences, in Posthumous Writings, pg. 267)

Frege distingue a apreensão do pensamento do reconhecimento de seu valor de verdade, ou seja, a emissão de um enunciado da asserção do mesmo, enquanto juízo. Seguindo a mesma linha apresentada nos *Fundamentos*, a justificativa da emissão de um juízo é o que se considera a fonte do conhecimento. Em 1884, essa justificativa se alternava entre as instâncias *a priori* e *a posteriori.* A descrição que Frege empreende a

[161] When someone comes to know something it is by his recognizing a thought to be true. For that he has first to grasp the thought. Yet I do not count the grasping of the thought as knowledge, but only the recognition of its truth, the judgement proper. What I regard as a source of knowledge is what justifies the recognition of truth, the judgement. I distinguish the following sources of knowledge:

1. Sense perception

2. The logical source of knowledge

3. The geometrical and temporal sources of knowledge (FREGE, G. Sources of Knowledge of Mathematics and natural Sciences, in Posthumous Writings, pg. 267).

seguir a respeito dessas três fontes do conhecimento nos permite correlacionar as fontes apresentadas com a nomenclatura kantiana de 1884. A percepção sensível seria a justificativa dos juízos sintéticos *a posteriori*. A fonte lógica do conhecimento seria a justificativa para os juízos analíticos e a fonte geométrica do conhecimento seria a justificativa para os juízos sintéticos *a priori*.

Dessas três fontes, Frege se ocupa em identificar os perigos que cada uma apresenta, no sentido de criar ilusões para o conhecimento, além de evidenciar as *contaminações* que estas receberiam de outros elementos que a elas se aglutinariam. Da percepção sensível, Frege imediatamente identifica contínuas formas de ilusões construídas pela aparência concreta dos fenômenos, tal qual percebidos pelos nossos sentidos. Junta-se a essas ilusões nossa crença de que as percepções sensíveis seriam as mais confiáveis fontes de conhecimento. Frege não se ocupa muito em demonstrar os perigos da percepção sensível, mas reconhece a importância dela nos conhecimentos da Física, como ponto de partida para análises mais pertinentes.

No que tange às fontes lógicas do conhecimento, os problemas identificados por Frege mostram-se mais sutis e, de acordo com ele, mais perigosos e perniciosos, pois seriam muito mais difíceis de serem percebidos. As fontes lógicas do conhecimento seriam, tal qual as fontes analíticas, apartadas das formas de intuição *a priori* e da sensibilidade. Porém, as fontes lógicas, bem como o pensamento, se expressam mediante a linguagem. E esta, por sua vez, possui uma conexão, em sua construção, com a sensibilidade. Tão profunda é a conexão entre o pensamento e sua forma externa de expressão, o falar, que tradicionalmente a própria filosofia considera o pensar, a exemplo de Platão, no *Teeteto*, evocado por Frege, um falar interior consigo mesmo. Frege alerta para essa confusão, pois o primeiro problema decorrente dessa consideração é cometer erros de linguagem na composição do pensamento, como atribuir o *status* de objeto para termos conceituais, além de atribuir termos gerais para objetos particulares ou, ainda, o de atribuir nomes próprios a nenhuma referência. De acordo com Frege, toda a teoria dos conjuntos concebida por ele incorreu nesse erro. Como demonstrado anteriormente, o paradoxo de Russell surge a partir da concepção de conjunto segundo a qual, para toda propriedade, sempre existe um conjunto domínio cujos elementos são todas as coisas às quais a referida propriedade se aplica. Esse referido conjunto, fundamental para a formulação de um conjunto superordenante que abarque o infinito, resulta na condição paradoxal quando colocamos a definição de um conjunto que não é elemento de si mesmo. A essa falha, Frege atribui uma das ilusões da fonte lógica do conhecimento.

Por fim, a fonte geométrica parece complementar e mesmo justificar a fonte lógica do conhecimento. Uma mudança significativa aqui consiste na derivação do infinito mediante apenas a fonte geométrica. Frege chega a essa conclusão mediante três passos. O primeiro consiste em explicitar a incapacidade da percepção sensível em apreender o infinito. A percepção sensível apreende apenas o múltiplo, a agregação. Em contrapartida, como segundo passo, o infinito, tomado na linguagem, é carregado da percepção sensível. Quando, na linguagem, empregamos termos relacionados ao infinito, por seu vínculo com a percepção sensível, expressamos apenas termos como “muito grande” ou “muito diverso”. Em outras palavras, sempre carregamos uma conotação quantitativa, agregativa e mecânica. Portanto, para Frege, não é possível apreender o infinito pela concepção lógica ou pela percepção sensível. O terceiro movimento de Frege, por fim, consiste em considerar a fonte geométrica como a mais distante da “contaminação” da percepção sensível[162].

Para Sluga (1980), esse texto marca o fim do logicismo fregiano. Sluga afirma:

> A tentativa de reduzir a aritmética à lógica foi rejeitada como uma falha. Os *Fundamentos da Aritmética* não devem ser buscados na lógica, mas na geometria. A lógica de Lotze foi, portanto, sacrificada para que o apriorismo kantiano pudesse viver. A busca por objetos lógicos terminou e Frege agora deseja conceder que os objetos possam ser dados apenas por intuição, seja empírica ou pura[163] (SLUGA, H. Gottlob Frege, pg. 173).

---

[162] Vide Sources of Knowledge of Mathematics and natural Sciences, in Posthumous Writings, pg.273.

[163] The attempt to reduce arithmetic to logic has been rejected as a failure. The foundations of arithmetic are not to be sought in logic at all, but in geometry. Lotze’s logicism hs therefore been sacrificed so that

Somente pela fonte geométrica do conhecimento, mediante o espaço e o tempo, que isso se torna possível.

Afirma Frege:

> Da fonte geométrica de conhecimento emana o infinito no mais exato e genuíno sentido do termo. Aqui, não nos diz respeito a prática linguística cotidiana segundo a qual "infinitamente grande" e "infinitamente diferente" nada mais dizem que "muito grande" e "muito diferente". Em cada segmento de reta, em cada circunferência, temos uma infinidade de pontos diferentes; e em cada ponto passam infinitas retas diferentes [164]. (FREGE, G. Sources of Knowledge of Mathematics and natural Sciences, in Posthumous Writings, pg. 224).

Essa posição apresentada por Frege sugere uma aproximação com a concepção kantiana abordada por Posy e Hanna (1992) na qual o infinito não pode ser apreendido conceitualmente, mas apenas pela concepção geométrica[165] . Afirma ainda Frege:

> Pois aqui não nos encontramos no domínio da psicologia, da representação, do que é subjetivo, mas no âmbito do objetivo e do verdadeiro. Aqui, a geometria e a filosofia se aproximam ao máximo. Com efeito, elas seguem juntas. Um filósofo que não tenha nenhuma familiaridade com a geometria é apenas um meio filósofo; e um matemático que não tenha nenhuma veia filosófica é

Kantian priorism might live. The search for logical objects has ended and Frege is now willing to grant that objects can be given only in intuition, be it empirical or pure (SLUGA, H. Gottlob Frege, pg. 173).

[164] From the geometrical source of knowledge flows the infinite in the genuine and strictest sense of this word. Here we are not concerned with the everyday usage according to which ‘infinitely large’ and ‘infinitely many’ imply no more than ‘very large’ and ‘very many’. We have infinitely many points on every interval of a straight line, on every circle, and infinitely many lines through every point (FREGE, G. Sources of Knowledge of Mathematics and natural Sciences, in Posthumous Writings, pg.273).

[165] Na seção *4. Space as an Intuition*, Posy argumenta: O primeiro desses parágrafos argumenta, como vimos, que a representação do espaço é necessariamente singular. A representação do espaço, diz Kant, abrange regiões espaciais individuais como partes e não como elementos subsidiários que se enquadram em um conceito mais geral. O segundo parágrafo tenta provar a intuitividade do espaço, apontando para sua infinita extensão e alegando que nenhum conceito poderia, por si só, estabelecer a infinidade do espaço. (Do original: The first of these paragraphs argues, as we have seen, that the representation of space is necessarily singular. The representation of space, says Kant, encompasses individual spatial regions as parts and not as subsidiary elements which fall under a more general concept. The second paragraph attempts to prove the intuitivity of space by pointing to its infinite extent and claiming that no concept could by itself establish the infinity of space.) (POSY. C. Kant’s Philosophy of Mathematics, pg 06).

> apenas um meio matemático. Essas disciplinas se afastaram uma da outra em detrimento de ambas[166]. (Idem)

As limitações da fonte lógica do conhecimento e a tentativa de Frege de expressar o infinito mediante definição e, posteriormente, nas *Leis Básicas da Aritmética,* como axioma, parece agora ser indicado por Frege como uma instância pela qual sempre haveria uma inconsistência intrínseca a essa tentativa, pelo fato de que o infinito só pode ser inferido mediante as fontes geométricas do conhecimento. O problema que teria causado o paradoxo da Lei Básica V se deve ao fato de que ela se encontra relacionada com a ideia de cardinalidade e que, embrionariamente, mediante a concepção de extensionalidade de conceitos, Frege derivou sua noção ingênua de conjuntos. O enunciado que daí se deriva, e que já se encontrava presente nos *Fundamentos da Aritmética*, o *conjunto de todos os conjuntos*[167]*,* passa a ser visto por Frege como um enunciado permeado da percepção sensível, e se constitui uma das ilusões da linguagem. Situação semelhante ocorre na investigação a respeito dos números inteiros. Como Frege argumentará no artigo "Números e Aritmética" (1924), a ideia de encontrar o maior número inteiro que "encerre" a série de números inteiros é uma abordagem oriunda da percepção sensível. Ela é, conforme ele sugere, uma contaminação no campo da fonte lógica do conhecimento, originária do uso da linguagem comum, e esta se encontra relacionada com a experiência sensível. Devido a isso, Frege afirma que pressupor o maior número inteiro sobre todos os outros, finalizando a série de números inteiros, não é apenas falsa, mas absurda. Uma vez que os números cardinais compõem o mecanismo inerente da predicação de segundo nível, podemos dizer que as mesmas dificuldades ocorrerão nessa esfera, de forma que não conseguiremos encontrar um conjunto que englobe todos os demais, ocasião evidenciada pelo paradoxo de Russell. A ideia de contagem, segundo Frege, apresenta

[166] But here we are not in the domain of the objective, of what is true. It is here that geometry and philosophy come closest together. In fact they belong to one another. A philosopher who has nothing to do with geometry is only half a philosopher, and a mathematician with no element of philosophy in him is only half a mathematician. These disciplines have estranged themselves from one another to the detriment of both (Idem).

[167] Ou a classe de todas as classes, configuração mais conhecida referente ao paradoxo de Russell.

um defeito inerente à cardinalidade. O processo de contar sempre evidencia uma quebra na continuidade dos números. Em todo processo de contagem sempre haverá lacunas que não permitem apreender o *continuum* numérico. A ideia de *continuum* é introduzida por Frege sistematicamente nesse escrito, vinculada como a única forma de apreensão do infinito. De acordo com Frege:

> Podemos chegar ao ponto de dizer que a série de números inteiros forma uma série descontínua, que por causa dessa descontinuidade é essencialmente diferente da série de pontos em um linha reta. Sempre há um salto de um número para o próximo, enquanto que em uma série de pontos não existe um próximo ponto (...) Qualquer coisa que se assemelhe a um *continuum* permanece tão impossível como sempre (...) As coisas são diferentes nas ciências estritas. Elas ensinam que existem infinitos comprimentos que não podem ser medidos por uma determinada unidade de comprimento[168]. (FREGE, G. Numbers and Arithmetic, pg. 276).

Se o processo de contagem é permeado pelas ilusões da percepção sensível, podemos lançar igualmente uma dúvida ao processo inerente à cardinalidade do domínio do enumerável que, como vimos, cerceou os caminhos do logicismo enquanto forma de atribuição numérica a conceitos de primeiro nível. Frege também aponta que cometeu um erro ao tentar definir o domínio dos números inteiros apenas pelo caminho lógico. Das ilusões apontadas sobre a percepção sensível, Frege teria claramente percebido a inconsistência e o absurdo em buscar englobar a série de números inteiros procurando o maior número que encerraria a série. Porém, mesmo o caminho da fonte lógica do conhecimento não seria capaz de preencher as lacunas encontradas entre os números inteiros, e tampouco o *continuum* poderia ser abarcado por ela.

Frege prossegue:

---

[168] All the same, we can go as far as to say that the series of kindergarten-numbers forms a discontinuous series, which because of this discontinuity is essentially different from the series of points on a straight line. There is always a jump from on number to the next, whereas in a series of points there is no such thing as a next point. In this respect nothing is essentially altered when the child becomes acquainted wth fractions. For even ater the interpolation f the rationals, the series of numbers including the rationals still has gaps in it. Anything resembling a continuum remains as impossible as ever. It is true that we can use one lenght to measure another with all the accuracy we need for business life, but we can do this only cause te needs of business will tolerate small naccuracies. Things are different in the strict sciences. These teach that there are infinitely many lenghts that cannot be measured by a given unit of lenght (FREGE, G. Numbers and Arithmetic, pg. 276).

> (...) que a série de números inteiros acabe eventualmente não é apenas falsa: consideramos a ideia absurda. Portanto, um modo *a priori* de cognição deve estar envolvido aqui. Mas essa cognição não precisa fluir de princípios puramente lógicos, como assumi originalmente. Existe ainda a possibilidade de haver uma fonte geométrica[169]. (Idem, pg. 277)

Como Sluga (1980) e Haddock (2006) sugerem, os passos finais de Frege em romper com o logicismo o conduzem, lentamente, a reconhecer, com Kant, o fundamento sintético *a priori* da aritmética e, como tal, reconhecer a intuição como envolvida irrevogavelmente na apreensão numérica. E, como tal, reconhecer a predominância da fonte geométrica do conhecimento sobre as demais fontes, tanto na apreensão dos objetos como na apreensão do infinito.

Porém, apesar disso, existem alguns obstáculos para que Frege possa ser considerado como um neokantiano a partir de 1924. O principal motivo se deve ao onipresente *problema Júlio César* e ao princípio da indeterminação, ou, como dissemos anteriormente, à impossibilidade de fixação de identidade sobre os números. Frege havia rejeitado todas as tentativas de Russell, além de sua própria abordagem publicada como tentativa de contornar o paradoxo de sua lei básica V, todas pelo mesmo motivo; nenhuma das soluções apresentadas foi satisfatória para resolver o problema de fixação de identidade entre os números. Também não era possível saber, mediante uma relação de igualdade, se esta se dava em relação a um nome e um número, ou um nome e um percurso de valor. Ainda que, pela lógica intensional, e pelo conjunto de sentidos apresentados, fosse claramente evidente a distinção, a lógica extensional não permitia identificar a diferença.

E a objeção de Júlio César também adentrou as análises dos fundamentos da geometria, à qual Frege passou a investigar após o fracasso em suas tentativas de

[169] (...) that the series of whole numbers should eventually come to an end is not just false: we find the idea absurd. So an *a priori* mode of cognition does not have to flow from purely logical principles, as I originally assumed. There is the further possibility that it has a geometrical source (Idem, pg. 277).

resolver o problema da Aritmética. O interesse de Frege pelos fundamentos da geometria é renovado quando da publicação dos *Grundlagen der Geometrie,* de David Hilbert, em 1899. Frege inicia uma sequência de debates com Hilbert a respeito da abordagem deste sobre os axiomas geométricos. De acordo com Sluga, Frege questiona dois pontos fundamentais na abordagem de Hilbert: a caracterização deste dos axiomas como explicações ou definições de termos geométricos e a adoção da tese de que os axiomas podem ser considerados verdadeiros quando se provarem consistentes. De acordo com Sluga: *A verdade dos axiomas não pode ser derivada de sua consistência - somente o reverso é possível*[170]*.* (SLUGA, H. Idem, pg. 171)

Para Haddock (2006) o problema se configura pelo fato de que os axiomas presentes em cada definição, enquanto partes constituintes destas, atuam como notas de conceitos, e portanto, são dependentes uns dos outros para que a definição se mostre consistente. Porém, uma análise de um axioma completo exige que se conheça todas as suas expressões, o que se mostra impossível. Afirma Haddock:

> Frege compara a axiomatização da geometria de Hilbert a um sistema de equações com várias incógnitas, uma vez que em um unico axioma mais de uma das expressões desconhecidas está presente; nesse caso, a totalidade dos axiomas é necessária para sua determinação[171]. (HADDOCK, G.E.R. A Critical Introduction to the Philosophy of Gottlob Frege, pg. 135).

A única forma apontada por Frege para se resolver a equação seria a total exposição de todas as variáveis, determinadas exclusivamente para cada axioma. Tal solução, no entanto, não é possível, pois não é possível determinar exclusivamente todos os axiomas como notas características de cada definição permanentemente, o que recai

---

[170] The truth of the axioms cannot be derived from their consistency - only the reverse is possible (SLUGA, H. Idem, pg. 171).

[171] Frege compares Hilbert’s axiomatization of geometry to a system of equations with various unknowns, since in a single axiom more than one of the unknown expressions is present, in which case, the totality of the axioms is needed for their determination (HADDOCK, G.E.R. A Critical Introduction to the Philosophy of Gottlob Frege, pg. 135).

no mesmo problema de Júlio César. Sem que se saiba o que é elemento “saturado” ou “insaturado”, não existe parâmetro a respeito do que pode ser enunciado. Afirma Frege:

> Um objeto, por exemplo, o número 2, não pode logicamente aderir a outro objeto, por exemplo, Júlio César, sem alguns meios de conexão. Esta, por sua vez, não pode ser um objeto, mas, ao contrário, tem de ser insaturado [172] (FREGE. G. On The Foundations of Geometry, pg. 33).

De acordo com Sluga[173], a crítica de Frege a Hilbert se estende a toda matemática não euclidiana que, iniciada com a sugestão de Gauss, pressupõe a migração do conteúdo intuitivo da geometria para uma teoria de axiomatização da geometria. Processo este que resulta em dificuldades similares às da aritmética, de modo que estabelecer a identidade dos números, apreender os objetos, bem como o infinito, demanda encontrar um caminho na geometria que não incorra nas mesmas dificuldades que Frege encontrava no caminho de Hilbert.

Em contrapartida, o caminho kantiano, fundamentado tão somente na intuição, também não será de todo endossado por Frege. Em “Uma Nova Tentativa de Fundamentação da Aritmética” (1924-25), Frege apresenta uma nova tentativa, a partir dos elementos apresentados nos últimos textos, de reconstruir o princípio de uma nova fundamentação da Aritmética.

Frege inicia fazendo uma revisão de alguns pontos das *Leis Básicas da Aritmética*. Enuncia aquilo que permanece e que ele ainda reconhece como verdadeiro. É verdadeiro para Frege que a Aritmética não necessita apelar para a experiência a fim de obter suas provas. Porém, uma retificação é acrescida: em lugar de *experiência,* Frege substitui por *percepção sensível*, de modo que, em sua abordagem final, a aritmética não necessita apelar para a percepção sensível em suas provas. Ajuste que

---

[172] An object, e.g. the number 2, cannot logically adhere to another object, e.g. Julius Caesar, without some means of connection. Thisin urn, cannot be an object but rather must be unsatured (FREGE, G. On The Foundations of Geometry, pg. 33).

[173] SLUGA, H. Gottlob Frege, pg. 172.

visa se coadunar com as fontes de justificação para emissão dos juízos em seus últimos textos.

O segundo ponto que permanece como verdadeiro, e que também está presente nos *Fundamentos*, é a máxima de que *todo enunciado numérico contém uma asserção sobre um conceito.* Essa referência, que também havia aparecido no texto "Numbers and Arithmetic", é relevante, na medida em que refere diretamente aos enunciados de segundo nível e que, até então, eram considerados analíticos, estruturados de forma estritamente lógica.

Por outro lado, a esses elementos aceitos por Frege como válidos para sua nova concepção sobre os fundamentos da Aritmética, ele introduz as modificações em seu sistema. A primeira retificação estabelecida por Frege já foi apresentada por nós na *Introdução*, e repetimos a referida passagem aqui, dada a relevância que ela apresenta, como consequência às concepções de Frege que foram demonstradas até o momento:

> Tive de abandonar a visão de que a aritmética não precisa apelar para a intuição nem em suas provas, entendendo por intuição a fonte geométrica de conhecimento, isto é, a fonte da qual fluem os axiomas da geometria [174] (FREGE, G. A New Attempt at a Foundation for Arithmetic, pg. 278).

A consequência prática natural a incluir a fonte geométrica do conhecimento como fonte para o reconhecimento do domínio dos números inteiros e da cardinalidade inevitavelmente passa pela adoção da intuição nos processos de prova. Isso implica reconhecer, com Kant, a natureza sintética *a priori* da Aritmética, bem como da necessidade do fundamento geométrico para apreender o infinito.

Porém, a despeito das possíveis conclusões mais evidentes que as afirmações de Frege até o momento sugerem, o mecanismo da fundamentação da Aritmética proposto

---

[174] I have had to abandon the view that arithmetic does not need to appeal to intuition either in its proofs, understanding by intuition the geometrical source of knowledge, that is, the source from which flow the axioms of geometry (FREGE, G. A New Attempt at a Foundation for Arithmetic, pg. 278).

por ele a seguir parece sugerir um caminho distinto de Kant. Após reiterar o reconhecimento das três fontes do conhecimento supracitadas, o texto discorre sobre o papel de cada uma delas na apreensão do conhecimento matemático. A fonte lógica de conhecimento se encontra presente sempre que são formuladas inferências. Isso implica que essa fonte está envolvida em quase todas as situações, não apenas na formulação das inferências aritméticas, mas também das geométricas. Porém, Frege estabelece uma constatação sobre a fonte lógica do conhecimento que não é condizente com a ideia anteriormente concebida para os conhecimentos analíticos, a de que novos elementos poderiam surgir dele. Para ele, a fonte lógica do conhecimento não pode fornecer nenhum objeto e nenhum número. Daí se faz necessária a fonte geométrica do conhecimento, de onde flui toda a geometria, mas também, na nova conjuntura elaborada, toda a aritmética.

De acordo com Frege:

> Como provavelmente, por si só, a fonte lógica de conhecimento não pode produzir números, apelaremos para a fonte geométrica do conhecimento Isso é significativo, porque significa que Aritmética e Geometria e, portanto, toda a Matemática, flui de uma e a mesma fonte de conhecimento - que é a geométrica[175]. (FREGE. G. A New Attempt at a Foundation for Arithmetic, pg. 279).

Mas, diferente do que podíamos supor, a fonte geométrica do conhecimento nunca atua sozinha. A fonte lógica do conhecimento atua em conjunto, a todo momento, na formação das inferências. Se, como dissemos anteriormente, a fonte lógica do conhecimento justifica a emissão de juízos analíticos e a fonte geométrica justifica os enunciados sintéticos *a priori*, podemos concluir que, na nova tentativa de fundamentação da aritmética, essas duas vias não são mutuamente excludentes em um processo de prova, atuando juntas no processo de emissão dos juízos. Afirma Frege:

[175] Since probably on its own the logical source of knowledge cannot yield numbers either, we will appeal to the geometrical source of knowledge. This is significant because it means that arithmetic and geometry, and hence the whole of mathematics flows from on and the same source of knowledge - that is the geometrical one (Idem, pg. 279).

> Esta é elevada à verdadeira fonte do conhecimento matemático com, é claro, a fonte lógica de conhecimento também sendo envolvida a todo momento. (Idem)

A singularidade dos escritos póstumos desse período torna difícil estipular a profundidade ou possível imbricação entre a fonte lógica do conhecimento e a fonte geométrica. Por um lado, ao indicar que a fonte lógica está sempre envolvida com a formulação de inferências, podemos sugerir que ocorre uma redução da função lógica, ficando essa reduzida às inferências dedutivas que, agravada pelo fato de que a fonte lógica não é capaz de fornecer novos números, passa a ocupar um espaço muito mais modesto no pensamento fregiano. Porém, como abordamos no Capítulo 1, na *Conceitografia*, a concepção de *inferência* de Frege mostra-se mais ampla, possuindo uma íntima conexão com as leis do pensamento, se abstraindo das particularidades das coisas. Essa conexão é o que, precisamente, separa os juízos de quaisquer gêneses psicológicas. Essas mesmas leis determinam os elementos lógicos básicos que constituem toda a realidade: conceito e objeto, bem como a estrutura de saturabilidade que determina as relações entre eles. Do que veremos a seguir, perceberemos que essa estrutura básica não se alterou na concepção fregiana em sua fase revisionista. Se as leis do pensamento que estruturam as relações de sentido e referência entre conceitos e objetos, de modo a regular seus valores de verdade, mantêm sua validade diante da primazia da fonte geométrica do conhecimento, então o papel da fonte lógica mostra-se não tão reduzido assim, mas ainda regulatório das relações entre os números, ainda que não mais seja capaz de fornecê-los. Outro ponto que reforça essa hipótese e que a trazemos para essa reflexão consiste na distinção que Frege empreende, desde 1892, entre a apreensão de uma relação entre um conceito e um objeto (isto é, a estrutura do pensamento) e o reconhecimento do valor de verdade dessa relação, que depende da instância do juízo. A abordagem sobre essa distinção, reiterada em 1924 no supracitado escrito “Sources of Knowledge of Mathematics and the Mathematical Natural Sciences”, pode lançar luz à questão. Um conhecimento só se dá no *reconhecimento* do valor de verdade de um pensamento, e este só ocorre no juízo. Porém, nenhum reconhecimento pode ser empreendido sem que haja, primeiramente, a apreensão desse pensamento. O papel fundamental de primazia da fonte geométrica do conhecimento parece estar localizado nessa primeira instância. O que Frege reconhece é que somente a fonte geométrica pode nos fornecer novos números, o que sugere que a apreensão de um pensamento se dá apenas mediante essa fonte. Isso, no entanto, não excluiria o fato de, após essa apreensão, as relações entre o apreendido até a emissão do juízo, passe por instâncias lógicas e inferenciais. Teríamos, dessa forma, um movimento contínuo de alternância entre as fontes lógicas e geométricas no processo de apreensão, reconhecimento e juízo de um pensamento.

Não nos parece de menor importância o movimento que Frege empreende ao determinar a fonte lógica do conhecimento como intercalada com a fonte geométrica. Embora seja a fonte geométrica que nos permita apreender os objetos, é a fonte lógica que nos permite estabelecer, a todo momento, as inferências entre os enunciados. Ao fazer essa referência direta, retomamos uma concepção contínua de Frege que, além de já ter sido mencionada na *Conceitografia*, foi reiterada com mais detalhes posteriormente no escrito póstumo *Lógica na Matemática*. Nesse escrito, de 1914, Frege estabelece a conexão entre a Matemática e a Lógica no sentido de que a segunda seria como o tecido estrutural no qual a primeira pode desenvolver sua fundamentação.

Os teoremas da matemática correspondem à conclusão obtida a partir de uma cadeia de inferências reconhecidamente verdadeiras. Ainda mais: a partir de inferências verdadeiras, obtemos novas verdades como teoremas. Dessa forma, se iniciamos com um teorema e fazemos o caminho reverso, desconstruindo o mesmo em inferências que o formam, encontramos um conjunto processual lógico que lhe deu origem:

> Se partimos de um teorema e traçamos as cadeias de inferências para trás até chegarmos a outros teoremas ou axiomas, postulados ou definições, descobrimos cadeias de inferência começando com teoremas, axiomas, postulados ou definições conhecidas e terminando com o teorema em questão. A totalidade dessas cadeias de inferências constitui a prova do teorema[176] (FREGE, G. Logic in Mathematics, in Posthumous Writings, pg. 204).

[176] If we start from a theorem and trace the chains of inference backwards until we arrive at other teorems or at axioms, postulates or definitions, we discover chains of inference starting from known theorems,

Essa passagem indica que, além das cadeias de inferências, uma rede de conexões entre inferências, postulados, teoremas, definições e axiomas se interconectam entre os enunciados. Partindo dessa concepção, ainda que a fonte geométrica do conhecimento seja a única fonte de apreensão dos objetos e acesso ao *continuum*, a ordenação do que é apreendido se dá pela fonte lógica do conhecimento, mediante a construção inferencial. Frege reconhece que a fundamentação da matemática reside em um conjunto de verdades primitivas, e que estas verdades formam um sistema que, por sua vez, existe mediante a conexão dessas verdades primitivas por inferências lógicas. De acordo com Frege:

> A essência da matemática deve ser definida por esse núcleo de verdades, e até que tenhamos aprendido o que são essas verdades primitivas, não podemos ter clareza sobre a natureza da matemática. Se assumirmos que conseguimos descobrir essas verdades primitivas e que a matemática foi desenvolvida a partir delas, ela aparecerá como um sistema de verdades que são conectadas entre si por inferência lógica[177] (Idem, pg. 205).

Parece-nos que essa afirmação de Frege não entra em conflito com seus escritos de 1924, no que diz respeito a delimitarmos o papel relevante da fonte lógica do conhecimento na descoberta de novos teoremas ou verdades a partir da descoberta de cadeias de inferências. Que tais verdades primitivas, no entanto, não residam mais em juízos analíticos, mas sim sintéticos *a priori*, e apreendidos mediante o emprego da intuição, como observamos anteriormente, certamente não era algo concebido nesse escrito de 1914. Porém, a mudança radical de Frege não parece alterar o fato de que tais verdades constituem um sistema, conectadas por inferências lógicas, e estas só podem ser apreendidas mediante a fonte lógica do conhecimento.

---

axioms, postulates or definitions and terminating with the theorem in question. The totality of these inference-chains constitue the proof of the theorem (FREGE, G. Logic in Mathematics, in Posthumous Writings, pg. 204).

[177] The essence of mathematics has to be defined by this kernel of thruths, and until we have earnt what this primitive thruths are, we cannot be clear about the nature of mathematics. If we assume that we hve succeeded in discovering these primitive thruths, and that mathematics has been developed from them, then it will appear as a system of thruths that are connected with one another by logical inference (Idem, pg. 205).

Porém, a presença da fonte geométrica, no que tange a outros elementos presentes no logicismo, mostra-se fundamental para desfazer as rupturas que identificamos anteriormente. A equinumericidade, extraída mediante a cardinalidade extensional dos conceitos, agora pode ser considerada como transposta em uma versão equivalente pela fonte geométrica do conhecimento, mediante a concepção de *proporção.* Frege procede da seguinte maneira. Uma linha reta, para ele, é equivalente a um conceito, assim como *sólido* é um conceito na Física. Quando dizemos que algo é um sólido, estamos subsumindo um objeto a um conceito, que ele nomeia como relação lógica. Dessa forma, se pretendemos extrair objetos reais ou inteiros, os dispomos em uma linha reta, de forma que os pontos que "caírem" sob a linha reta, serão os objetos caindo sob o conceito. Em contrapartida, Frege parte dos números complexos para, a partir deles, chegar aos números reais e, posteriormente, aos números inteiros. Executando esse processo pela fonte de conhecimento geométrico, Frege substitui a linha reta pelo *plano base*, que consiste na aplicação da *superfície gaussiana* para inferência dos números complexos. A justificativa de Frege para iniciar pelos números complexos ao invés dos inteiros positivos ou naturais incide em uma questão de ordem. Iniciar pelos naturais e ir crescendo até os números complexos implica em não conhecer plenamente o significado dos números. Estender progressivamente acarreta não apreender todo o significado do domínio numérico. Ao invés, Frege propõe iniciar pelo ponto mais abrangente e, de forma decrescente, decompor o domínio numérico. Frege argumenta:

> Que foi assim que o assunto evoluiu historicamente não é argumento contrário, uma vez que, em matemática, devemos sempre buscar um sistema que seja completo em si mesmo. Se o que foi reconhecido até agora se mostrar inadequado, deve ser demolido e substituído por uma nova estrutura. Assim, logo no começo, vou direto ao objetivo final, o número complexo geral[178] (FREGE, G. A New Attempt at a Foundation for Arithmetic, pg. 279)

[178] That this was how the subject evolved historically is no argument to the contrary, since in mathematics we must always strive after a system that is complete in itself. If the one that has been acknowledged until now proves inadequate, it must be demolished and replaced by a new structure. Thus, right at the outset I go straight to the final goal, the general complex number (FREGE, G. A New Attempt at a Foundation for Arithmetic *in* Posthumous Writings, pg. 279).

Frege reconhece o sistema historicamente constituído inadequado e incompleto, precisamente porque não contém um significado fixo para o domínio numérico. A necessidade de um sistema matemático completo já havia sido evidenciada, no artigo supracitado "Logic in Mathematics", onde Frege expressa percurso similar, mas referente a sentenças:

> Na construção de um sistema, deve-se assumir que as palavras têm significados precisos e que sabemos o que são. Portanto, nesse ponto, podemos deixar de fora exemplos ilustrativos e voltar nossa atenção para a construção de um sistema. Na construção de um sistema, o mesmo grupo de sinais, sejam sons ou combinações de sons (sinais falados) ou sinais escritos, podem ocorrer repetidamente. Isso nos dá uma razão para introduzir um sinal simples para substituir um grupo de sinais com a estipulação de que esse sinal simples deve sempre substituir o grupo de sinais. Como uma sentença é geralmente um sinal complexo, o pensamento expresso por ela também é complexo: na verdade, é organizado de tal maneira que partes do pensamento correspondem a partes da frase[179] (Idem, Logic in Mathematics, *in* Posthumous Writings, pg. 207).

Que esse sistema de inferências lógicas que, por sua vez, se imbricam com um sistema de pensamentos, como Frege sugeriu acima, encontra-se em isonomia com um sistema matemático, Frege o declara no mesmo artigo:

> Euclides teve uma suspeita sobre essa ideia de um sistema; mas ele falhou em realizá-lo e quase parece que, no momento, estávamos mais longe desse objetivo do que nunca. Vemos matemáticos cada um perseguindo seu próprio trabalho em algum fragmento do assunto, mas esses fragmentos não se encaixam em um sistema; de fato, a ideia de um sistema parece quase ter sido

[179] In constructing a system it must be assumed that the words have precise meanings and that we know what they are. Hence we can at this point leave illustrative examples out of account and turn our attention to the construction of a system.

In constructing a system the same group of signs, wheter they are sounds or combinations of sounds (spoken signs) or written signs, may occur over and over again. This gives us a reason for introducing a simple sign to replace such a group of signs with the stipulation that this simple sign is always to take the place of that group of signs. As a sentence is generally a complex sign, so the thought expressed by it is a complex too: in fact it is put together in such a way that parts of the thought correspond to parts of the sentence (Idem, Logic in Mathematics, *in* Posthumous Writings, pg. 207).

> perdida. E, no entanto, a luta por um sistema é justificada[180] (Idem, pg. 205).

Dessa forma, parece-nos que a ideia de um sistema matemático cujo significado resida no conhecimento do mais complexo para o mais simples, ou do todo para os fragmentos parece ter sido o elemento norteador do processo adotado por Frege a partir desse ponto em sua revisão dos *Fundamentos da Aritmética*[181]. Sendo assim, a partir de um intervalo traçado no plano base, a razão extraída do intervalo consiste em um número complexo. Nesse sentido tomado por Frege, o plano base será equivalente à linha reta e ao sólido, ou seja, um conceito, e a extração dos números complexos são os objetos inferidos mediante a razão dos intervalos na superfície. A equinumericidade, fundamental para estabelecer a identidade e igualdade dos números de forma analítica, agora, mediante a fonte geométrica do conhecimento, se dá pela proporção numérica num plano. Dessa forma, os elementos mais primitivos da proporção se dão como *simetria* entre pontos e linha. Dessa forma, um ponto A é simétrico a um ponto B com respeito a uma linha *l*. Um triângulo ABC é simétrico a um triângulo A´B´C´ com respeito à linha *l*. A "linha l", nesse caso, é o conceito sob o qual caem os referidos objetos em uma relação lógica, mas a igualdade entre eles é indicada pelo tipo de proporção que os une. Proporções geométricas como simetria, colinearidade, congruência, paralelismo, intersecção e similaridade passam a ser, em uma superfície gaussiana, parâmetros apriorísticos que delimitam as relações lógicas entre os números, em uma versão prototípica de uma matemática unificada pelas fontes geométricas e lógicas do conhecimento. Como Frege enuncia:

---

[180] Euclid had an inkling of this idea of a *system*; but he failed to realize it and it almost seems as if at the present time we were further from this goal than ever. We see mathematicians each pursuing his own work on some fragment of the subject, but these fragments do not fit togeter into a system; indeed the idea of a system seems almost to have been lost. And yet the striving after a system is a justified one (Idem, pg. 205).

[181] Comparando as duas abordagens, de *Logic in Mathematics* (1914) e *A New Attempt at a Foundation of Arithmetic* (1924), temos uma decomposição semelhante em sua proposta de isonomia: Da paerspectiva das sentenças (e, em contrapartida, do sentido da proposição) temos, do mais complexo para o mais simples - Teorema, axiomas, postulados e definições. Da perspectiva dos números e seus significados, temos: Números complexos, os reais, os inteiros e, por fim, os naturais.

> Quanto mais eu pensava sobre o assunto, mais convencido me tornava de que a aritmética e geometria se desenvolviam na mesma base - uma geométrica de fato - de modo que a matemática em sua totalidade é realmente geometria. Somente nessa visão a matemática se apresenta como completamente homogênea por natureza[182] (FREGE. G. Numbers and Arithmetic, pg. 277).

Pressupomos, considerando os textos anteriores, que os números e relações que são extraídos pela fonte geométrica consideram, antes mesmo da superfície gaussiana, o *continuum,* que possibilita a apreensão do infinito. Somente dessa forma é possível, mediante a intuição espaço-temporal, estabelecer as proporções no plano base e, assim, inferir todos os números e proporções, axiomas, teoremas e definições. Identidade, nesse protótipo, se dá mediante *posição*, de modo que, por meio da fonte geométrica, a persistência e fixidez da identidade numérica se dá por sua posição no plano base, mediante o qual os pontos podem ser extraídos.

[182] The more I have thought the matter over, the more convinced I have become tat arithmetic and geometry have developed on the same basis - a geometrical one in fact - so that mathematics in its entirety is really geometry. Only on this view does mathematics present itself as completely homogenous in nature (FREGE. G. Numbers and Arithmetic, pg. 277).

Considerações Finais

Cabe indagarmos, nessas considerações finais, se os últimos movimentos de Frege lograram resolver os problemas que o ocuparam por toda sua vida. Fundamentar a aritmética na lógica, e mais especificamente em uma fonte analítica dos juízos resultou, como vimos, em um conjunto de desafios. Dentre eles, demonstrar como novos números poderiam surgir a partir de juízos analíticos, apresentar um horizonte intrínseco à lógica que abarcasse todos os juízos e todos os elementos constituintes da realidade, tanto as classes quanto o infinito; demonstrar que valores de verdade sobre enunciados temporais eram persistentes de forma intemporal; e, principalmente, demonstrar de que forma a identidade dos números poderia ser assegurada de maneira persistente enquanto extensões de primeiro nível. Os problemas inerentes ao logicismo fregiano parecem se limitar a três termos distintos: *identidade, infinitude e continuum.* Nenhuma das tentativas de estabelecer a identidade de um objeto mediante as fontes analíticas logrou êxito, uma vez que, pela definição de relações de segunda ordem, não é possível estabelecer a diferença entre um objeto, um nome individual ou um percurso de valor, o que resultou na *objeção Júlio César*. E a tentativa de fazê-lo de forma extensional ocasionou na antinomia dos conjuntos. Buscar resolver a antinomia resultou em uma nova replicação de espécies de objetos que se estende ao infinito e não permite estabelecer a identidade dos mesmos. A infinitude se mostrou um obstáculo ao logicismo. Em relação ao domínio do enumerável, vimos que a propriedade de *ser contável* não se aplica ao infinito, pois não é possível estabelecer uma contagem de objetos ou percursos de valores como extensão em um conceito totalizante sem cair no paradoxo referente à Lei Básica V. E essa é a única forma possível sem entrarmos na abordagem de conjuntos cantorianos. Além disso, como observado no Capítulo 2, para que um pensamento seja, de fato, *contado,* isto é, tenha sua cardinalidade definida, é necessário que se estipule um conjunto domínio de referência, visto que potencialmente todos os objetos podem constituir a extensão de um conceito. A possibilidade, por exemplo, seria a de estipular apenas os objetos cujo valor de verdade seja o verdadeiro.

Porém, mesmo essa possibilidade poderia redundar em um conjunto infinito de sentido, de acordo com a abordagem de Bolzano ou dos infinitos sentidos de Frege. A distinção entre sentido e referência, igualmente, pressupõe, em mais de um ponto, um contínuo processo de geração de sentidos sobre cada referência, o que resulta nos infinitos sentidos possíveis. O terceiro problema, o do *continuum,* diz respeito à continuidade das relações numéricas e semânticas. Identificar uma cadeia de inferências sem lacunas, princípio básico de Euclides e meta de Frege em todo o logicismo, se mostra impossível. Como Frege indicou, nenhuma continuidade pode ser obtida pela fonte lógica do conhecimento, havendo sempre lacunas em uma cadeia. Não se consegue passar de um número para outro sem lacunas. Pelo isomorfismo entre as leis dos números e do pensamento, entendemos que também não se pode passar de um pensamento a outro, de um sentido a outro a respeito de uma mesma referência, pela continuidade inferencial. O *continuum* que permitiria essa passagem, só pode ser apreendido pela fonte geométrica do conhecimento.

A respeito da referida isonomia entre as leis do pensamento e as da aritmética já comentamos ao nos referirmos à concepção fregiana de *sistema.* Mas é importante ressaltarmos alguns pontos chave dessa isonomia no que tange ao *continuum* e às dificuldades que Frege encontrou ao longo do desenvolvimento do logicismo. Na *Conceitografia*, vimos que a conexão entre os conteúdos judicáveis apenas pareciam sintéticos a priori sob um primeiro olhar. Porém, na concepção de Frege, alguns enunciados encobriam uma cadeia despercebida de inferências, que poderiam ser evidenciadas por sua linguagem ideográfica[183]. Nos *Fundamentos da Aritmética*, essa conexão, partilhada tanto entre o pensamento quanto os números, encontra dificuldades no que tange a definir a continuidade da identidade entre os números e objetos. A objeção de Júlio César, apesar de reconhecidamente absurda, já que não se confunde Júlio César com um número, não pode ser claramente distinguida pelo logicismo, dada a transparência entre objetos e números. A definição extensional resolve parte do problema. Porém, dado que sua axiomatização encerra o conhecido

[183] Vide *Conceitografia*, §23.

paradoxo de Russell, a solução se mostra inconsistente. Soma-se a isso o fato de que, nos casos em que a extensão formada por percursos de valores acarreta a dificuldade de precisarmos estipular antecipadamente o conteúdo do conjunto para assegurarmos a persistência da identidade dos objetos, temos que o sistema fregiano encontra dificuldades para manter a estrutura de cadeias de inferências[184]. A divisão entre *sentido e referência* também apresenta dificuldades. Como Frege enuncia no texto "Digressões sobre o Sentido e a Referência", ele posiciona a lógica extensional ao campo das referências, enquanto que, à lógica intensional, ele relaciona aos sentidos[185]. Se, todavia, o método extensional de fixação de identidade pela relação biunívoca entre a extensão de conceitos esbarra nos problemas que já apresentamos, então só sobraria o amparo da lógica intensional para estabelecermos a identidade de um enunciado. Porém, conhecer a totalidade de uma referência mediante o sentido exigiria que se conhecessem todos os modos de apresentação daquela referência. E, como vimos, Frege reconhece que isso é impossível, uma vez que não temos como conhecer os sentidos potenciais de uma referência. Todas essas dificuldades são reunidas no texto "Logic in Mathematics". Como dito anteriormente, na concepção de *sistema* que Frege apresenta no texto, se partirmos do enunciado mais complexo (postulado) poderíamos, por decomposição, encontrarmos toda a cadeia de inferências, chegando até as definições (as partes da sentença mais complexa). No entanto, Frege reconhece as limitações desse processo. Se, por um lado, pelo ponto de vista formal, essa decomposição é possível, a interdependência com a lógica intensional, no que diz respeito à apreensão dos sentidos de todas as partes do processo, dificilmente pode ser reconstituída pela mente humana:

> Se tentarmos lembrar tudo o que pertence ao sentido dessa palavra, não conseguiremos avançar. Nossas mentes simplesmente não são suficientemente abrangentes. Muitas vezes precisamos usar um sinal com o qual associamos um sentido muito complexo. Tal sinal parece, por assim dizer, um receptáculo para o sentido, para que possamos carregá-lo conosco, estando sempre

[184] Vide *Leis Básicas da Aritmética*, §10.

[185] Vide Digressões sobre o Sentido e a Referência, *in* Lógica e Filosofia da Linguagem, pg. 160.

> conscientes de que podemos abrí-lo, caso precisemos do que ele contém. Daqui resulta que um pensamento, como eu entendo a palavra, não pode ser identificado com um conteúdo da minha consciência. Se, portanto, precisamos de tais sinais - sinais nos quais, por assim dizer, ocultamos um sentido muito complexo como um receptáculo - também precisamos de definições para que possamos enfiar esse sentido no receptáculo e retirá-lo novamente[186] (FREGE, G. Logic in Mathematics *in* Posthumous Writings, pg. 209).

Dados todos esses pontos, nos indagamos: considerando que, para Frege, a busca por uma cadeia de inferências sem lacunas nos permite obter novos conhecimentos, como podemos proceder por esse caminho se é impossível, para nossa mente, apreender todo o processo inferencial sem as referidas lacunas? Se uma infinidade de sentidos (*definiens*) encontra-se encapsulada em um conjunto de outros sentidos (*definiendum*)[187] como podemos extrair algo novo nessas cadeias de inferências? Qual é a chave que nos permite destrancar todo o conteúdo encapsulado? Ao que nos parece, o logicismo procurou evitar a concepção mecanicista e agregacionista para, ao final, encontrar uma nova infinidade de agregados. Temos *sentidos* que atuam como receptáculos, unidades intemporais isoladas entre si, objetos cuja identidade precisa ser estipulada antecipadamente em blocos isolados. Onde está o fio de Ariadne que conecta todos esses elementos, de modo que, de fato, consigamos estabelecer enunciados e cadeias de inferências sem lacunas e, com isso, reconhecer o *sistema* que Frege busca encontrar? A conclusão que Frege parece chegar é que um tal

---

[186] If we tried to call to mind everything appertaining to the sense of this word, we should make no headway. Our minds are simply not comprehensive enough. We often need to use a sign with which we associate a very complex sense. Such a sign seems, so to speak, a receptacle for the sense, so that we can carry it with us, while being always aware that we can open this receptacle should we have need of what it contains. It follows from this that a thought, as I understand the word, is in no way to be identified with a content of my consciousness. If therefore we need such signs - signs in which, as it were, we conceal a very complex sense as in a receptacle - we also need definitions so that we can cram this sense into the receptacle and also take it out again (FREGE, G. Logic in Mathematics *in* Posthumous Writings, pg. 209).

[187] Em “Logic in Mathematics”, Frege estipula que uma definição é um sinal (*definiendum)* que substitui um conjunto de sinais complexos (*definiens*). Mas, esses sinais estão conectados por um entrelaçamento de sentidos. De acordo com Frege: “O *definiendum* adquire seu sentido somente dos *definiens*. Esse sentido é construído a partir dos sentidos das partes dos *definiens*.” (Do original: The *definiendum* acquires its sense only from the *definiens*. This sense is built up out of the senses of the parts of the *definiens* (Idem, pg. 208)

sistema só pode ser encontrado se todos esses elementos forem inseridos em um receptáculo que os contenha. Mas não um conjunto totalizante ou superordenante, não um domínio estático, mas um *continuum* fluído.

A pergunta que fazemos, ao final, é: a fonte geométrica do conhecimento resolve essas questões? Do que vimos, ela não exclui a fonte lógica do conhecimento, uma vez que esta é fundamental em qualquer processo de inferência. Dessa forma, a fonte geométrica do conhecimento incorpora a fonte lógica. Podemos pressupor que, ao fazê-lo, em termos práticos, ela traz para o campo de construção de inferências o horizonte do *continuum*, de onde se desdobram o infinito, bem como uma ilimitada miríade de pensamentos que constituem o *Terceiro Reino*, região lógica que abriga os infinitos sentidos fregianos. Nesse sentido, parece que Frege estabelece uma inversão referente a um processo que ele havia posto em prática em 1884, mais especificamente nos §63 a 68 dos *Fundamentos da Aritmética*.

Nos referidos parágrafos, Frege busca fundamentar a colinearidade biunívoca entre percursos de valores. Esse recurso se mostra fundamental para que ele demonstre uma forma de apreensão de um número determinado, de maneira a reconhecê-lo como sendo o mesmo em outros enunciados distintos. Para isso, Frege se vale das leis da igualdade, mas o faz de uma maneira muito específica: Frege equipara a igualdade ao paralelismo entre duas retas. A partir do isomorfismo entre igualdade e paralelismo, Frege demonstra como relações geométricas podem ser apreendidas como equações aritméticas. Não apenas isso, Frege também demonstra que o paralelismo pode ser logicamente definido pela igualdade quando se toma os enunciados que asserem as relações de paralelismo como conceitos e se estabelece a colinearidade entre as extensões desses conceitos. Anderson e Zalta (2003) chamam atenção para esse fato, já presente em 1884 onde, a partir do §68 dos *Fundamentos da Aritmética*, Frege considera tanto a definição de *números* quanto a de *direção* e *forma* pelo mesmo princípio extensional, nomeando a todos como *objetos lógicos*. De fato, no referido parágrafo, temos:

> Se a reta *a* é paralela à reta *b*, a extensão do conceito "reta paralela à reta *a*" é igual à extensão do conceito "reta paralela à reta *b*"; e inversamente: se as extensões dos conceitos mencionados são iguais, *a* é paralela a *b*. Tentemos pois definir:
>
> A direção da reta *a* é a extensão do conceito "paralelo à reta *a*";
>
> A forma do triângulo *d* é a extensão do conceito "semelhante ao triângulo *d*".
>
> Se desejamos aplicá-lo a nosso caso, devemos colocar conceitos no lugar de retas ou triângulo e, no lugar do paralelismo ou semelhança, a possibilidade de coordenar biunivocamente os objetos que caem sob um conceito aos que caem sob outro[188]. (FREGE, G. *Fundamentos da Aritmética*, §68).

A estipulação do princípio extensional sobre números ser estendida sobre direções e formas geométricas demonstra que Frege incorporou analogamente os princípios lógicos sobre os geométricos, o que lhe permitiu denominar a todos como *objetos lógicos.*

Acontece que a sistematização de todos esses objetos lógicos, o que inclui o *Princípio de Hume* e os valores de verdade, se dá pela Lei Básica V. Dessa forma, Anderson e Zalta comentam: *um fregiano poderia então sugerir que nós derivamos o Princípio de Hume, Direções, Formas e Valores de Verdade das relações de equivalência como equinumericidade, paralelismo, similaridade geométrica e equivalência material.*

[188] Wenn die Gerade a der Gerade b parallel ist, so ist der Umfang des Begriffes „Gerade parallel der Gerade a“ gleich dem Umfange des Begriffes „Gerade parallel der Gerade b“; und umgekehrt: wenn die Umfänge der genannten Begriffe gleich sind, so ist a parallel b. Versuchen wir also zu erklären:

die Richtung der Gerade a ist der Umfang des Begriffes „parallel der Gerade a“;

die Gestalt des Dreiecks d ist der Umfang des Begriffes „ähnlich dem Dreiecke d“.

Wenn wir dies auf unsern Fall anwenden wollen, so haben wir an die Stelle der Geraden oder der Dreiecke Begriffe zu setzen und an die Stelle des Parallelismus oder der Aehnlichkeit die Möglichkeit die unter den einen den unter den andern Begriff fallenden Gegenständen beiderseits eindeutig zuzuordnen. Ich will der Kürze wegen den Begriff F dem Begriffe G gleichzahlig nennen, wenn diese Möglichkeit vorliegt, muss aber bitten, dies Wort als eine willkührlich gewählte Bezeichnungsweise zu betrachten, deren Bedeutung nicht der sprachlichen Zusammensetzung, sondern dieser Festsetzung zu entnehmen ist (FREGE, G. Die Grundlagen Der Arithmetik, §68).

[189](ANDERSON & ZALTA, David J., Edward N. Frege, Boolos and Logical Objects, *in Journal of Philosophical Logic 33: 1–26, 2004*).

Esse processo de estipulação estabelecido por Frege ainda em 1884, que possibilitou abordar todos esses elementos, incluindo os geométricos, como objetos lógicos e sujeitos às regras da extensionalidade parece ter sido, em 1924, objeto de uma espécie de *engenharia reversa* de Frege, no sentido de devolvê-los à fonte geométrica do conhecimento.

É significativo, para esse ponto, a nota inserida na seção D de *A New Attempt of a Foundation for Arithmetic*, acrescentada pelo editor a respeito do título e parágrafo que antecede a seção, propriamente dita. A nota diz, como se segue:

> É impossível determinar se o título ‘Peculiaridade da Geometria’ e o parágrafo a seguir são colocados aqui de acordo com as próprias instruções de Frege ou por instigação dos editores anteriores. Temos apenas uma nota deles dizendo que essa passagem ‘é para ser inserida antes de D’[190] (FREGE, G. A New Attempt of a Foundation of Arithmetic, *in* Posthumous Writing, pg. 279).

O parágrafo mencionado ganha relevância para a hipótese que levantamos sobre a inversão da estipulação empreendida por Frege nesse escrito póstumo em relação à estipulação feita em 1884, nos *Fundamentos da Aritmética*. Aqui, Frege retoma a característica conceitual dos elementos geométricos, bem como a *relação lógica* entre as coisas que são subsumidas por eles:

> Agora em geometria nós falamos de linhas retas, assim como na física as pessoas falam de sólidos. ‘Sólido’ é um conceito e você pode apontar para uma coisa, dizendo ‘Isso é um sólido’; ao assim

[189] *(...)*a Fregean would then suggest that we derive Hume’s Principle, Directions, Shapes, and Truth Values from equivalence relations like equinumerosity, parallelism, geometric similarity, and material equivalence (ANDERSON & ZALTA, David J., Edward N. Frege, Boolos and Logical Objects, *in Journal of Philosophical Logic 33: 1–26, 2004*)..

[190] It is impossible to determine whether the heading ‘Peculiarity of Geometry’ and the paragraph that follows it are placed here in accordance with Frege’s own instructions or at the instigation of the previous editors. We only have a note of theirs saying that this passage ‘is to be inserted before D’ (FREGE, G. A New Attempt of a Foundation of Arithmetic, *in* Posthumous Writing, pg. 279).

> fazer você subsume a coisa sob o conceito 'sólido'. Nós podemos claramente chamar subsunção uma relação lógica[191]. (Idem).

Entretanto, a seção D, como já mencionamos, prossegue estabelecendo os números mediante a derivação dos números complexos pela superfície gaussiana. Pela fonte geométrica, a identidade numérica passa a ser definida pela *posição* do ponto no *plano base gaussiano*, bem como as *linhas retas.* Equinumericidade, paralelismo, similaridade e equivalência material que, em 1884, estavam vinculados aos valores de verdade, direção, forma e identidade numérica mediante a extensionalidade, agora parecem ser estipuladas pelo caminho inverso, pela referência geométrica, e que passa a incorporar a fonte lógica do conhecimento, na medida em que, considerando os elementos como *sólidos* e *linha reta* como conceitos, ainda se mantém a relação lógica entre as coisas que são subsumidas por eles. Entretanto, o princípio que determina essa subsunção é dado pela fonte geométrica, não mais extensional.

A solução de Frege, além de construir os pilares prototípicos de uma matemática unificada, modelada sobre a estrutura da superfície gaussiana, também contempla um protótipo que unifica, em um mesmo processo, a lógica extensional e intensional para atingir a fixação de identidades de objetos, ao mobilizar as fontes lógicas e geométricas do conhecimento em um único sistema.

[191] Now in geometry we speak of straight lines, just as in physics people speak of solids, say. 'Solid' is a concept and you may point at a thing, saying 'This is a solid'; by so doing you subsume the thing under the concept 'solid'. We may surely call subsumption a logical relationship (Idem).

Referências Bibiográficas

ANDERSON & ZALTA, David J., Edward N. Frege, Boolos and Logical Objects, *in Journal of Philosophical Logic 33: 1–26, 2004.*

BELL, D. Frege`s Theory of Judgement. New York: Ed.: Clarendon Oxford, 2002.

BLANCHÉ, R.; DUBUCS, J. História da Lógica. Lisboa, Portugal: Ed.: 70, 2001.

BOGHOSSIAN, P. Artin. Analyticity: Metaphysical or Epistemological?, *in* A Companion to the Philosophy of Language, 2017.

BOLZANO, B. Theory of Science. Ed.: Oxford University Press, 1973.

BOOLOS, G. Logic, Logic and Logic. London: Harvard University Press, 1998.

BURGE, T. Truth, Though, Reason - Essays on Frege. New York: Oxford University Press, 2005.

CARNAP, R. Frege's Lectures on Logic - Carnap's Student Notes (1910-1914). USA: Full Circle, 2004.

Child, J.M. The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz. New York: Dover Publications, 2005.

COFFA, J.A. The Semantic Tradition from Kant to Carnap - To the Vienna Station. New York: Cambridge University Press, 2003.

DAUBEN, J.W. Georg Cantor - His Mathematics and Philosophy of the Infinite, New Jersey: Princeton University Press, 1979.

DUMMETT, M. Frege - Philosophy of Language. New York: 1a Ed.: Harper &

Row Publishers, 1973.

DUMMETT, M. Frege - Philosophy of Mathematics. New York: 1a Ed.: Harper & Row Publishers, 1995.

FERREIRA, F. Logicismo *in* Compêndio em Linha de Problemas de Filosofia Analítica, Lisboa: 1ª Ed. 2014.

FREGE, G. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Deutschland: Springer Spektrum, 2018.

_________ Die Grundlagen der Arithmetik - Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau: Verlag von Wilhelm Koebner, 1884.

__________ Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf Loogische Studien. Herausgegeben und Eingeleitet von Günther Patzig. Deutschland: Vandenhoeck & Ruprecht, 2008.

__________ Grundgesetze der Arithmetik. Iena: Ed.: Hermann Pole, 1893.

_________ Basic Laws of Arithmetic - Derived Using Concept-Script, Volumes I & II. United Kingdom: Oxford - University Press, 2016.

_________The Basic Laws of Arithmetic - Exposition of the System. Berkeley, Los Angeles, London: University of California Press, 1964.

_________The Philosophical and Mathematical Correspondence. England: Basil Blackwell Publisher, 1976.

_________ Conceptografia. México: Universidad Auónoma Del México, 1972.

__________ Os *Fundamentos da Aritmética*. São Paulo: Nova Cultural, 1989.

__________ Sobre Conceito e Objeto, *in* Lógica e Filosofia da Linguagem. São Paulo: Cultrix/Ed. da Universidade de São Paulo, 1978.

__________ Função e Conceito, *in* Lógica e Filosofia da Linguagem. São Paulo: Cultrix/Ed. da Universidade de São Paulo, 1978.

__________ Prólogo às *Leis Básicas da Aritmética*, *in* Três Aberturas em Ontologia: Frege, Twardowski e Meinong. Florianópolis: Rocca Brayde, 2005.

__________ Sobre Sentido e Referência, *in* Lógica e Filosofia da Linguagem. São Paulo: Cultrix/Ed. da Universidade de São Paulo, 1978.

__________ As Fontes do Conhecimento em Matemática e em Ciências Naturais, *in* Lógica e Filosofia da Linguagem. São Paulo: Cultrix/ Ed. da Universidade de São Paulo, 1978.

__________ On Euclidean Geometry, *in* Posthumous Writings. Chicago: Ed. Uiversity Chicago Press, 1979.

__________ O Pensamento, *in* Investigações Lógicas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002.

__________ A Negação, *in* Investigações Lógicas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002.

__________ Generality Logical, *in* Posthumous Writings. Chicago: Ed. Uiversity Chicago Press, 1979.

__________ A New Attempt of Foundation of Arithmetic, *in* Posthumous Writings. Chicago: Ed. Uiversity Chicago Press, 1979.

__________ Numbers, *in* Posthumous Writings. Chicago Press, 1979.

__________Prefácio à *Conceitografia, in* Lógica e Filosofia da Linguagem. São Paulo: Cultrix/ Ed. da Universidade de São Paulo, 1978.

__________ Sobre a Finalidade da *Conceitografia, in* Lógica e Filosofia da Linguagem. São Paulo: Cultrix/ Ed. da Universidade de São Paulo, 1978.

GABBAY, D.M.; WOODS, J. The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege. London: Elsevier, 2004.

GAO, Sicun, Why is Hume’s Principle not good enough for Frege?, 2011.

GEACH, Peter; BLACK, Max, Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege. USA: 2a Ed.: Basil Blackwell Oxford University Press, 1960.

GUYER, P. Kant. London and New York: Routledge, 2006.

HADDOCK, G.E.R. A Critical Introduction to the Philosophy of Gottlob Frege. Puerto Rico: Ashgate, 2006.

HALE, B.; WRIGHT, C. MILLER, A. A Companion to the Philosophy of Language, Second Edition. United Kingdom: Blackwell Publishing Ltda. , 2017.

HANNA, R. Kant and the Foundations of Analytic Philosophy. USA: Oxford University Press, 2004.

HECK, R. G. Reading Frege’s Grundgesetze. United Kingdom: Ed: Oxford University Press, 2012.

HINTIKKA, J. *in* Carl J. Kant´s Philosophy of Mathematics, 1992.

JOLLEY, N. Leibniz. London and New York: Routledge, 2005.

KANT, I. Kritik der Reinen Vernunft. Deutschland: Koch, Neff & Oetinger & Co, 1956.

_______ Crítica da Razão Pura. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

_______ Lógica de Jasche. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1992.

KLEMENT, K. The Number of Senses. Netherlands: Ed.: Kluwer Academic Publishers, 2003.

KNEALE & KNEALE, W & M. The Development of Logic. Great Britain: Ed. Oxford University Press, 1971.

LINNEBO, O. Compositionality and Principle of Context. University of Bristol, 2008.

LAPOINTE, S. Bolzano´s Theoretical Philosophy. UK: Ed.:Palgrave Macmillan, 2011.

MACFARLANE, Frege, Kant, and the Logical and Logicism. California: University of California, 2002.

MENDELSOHN, R. The Philosophy of Gottlob Frege. United Kingdom: Cambridge University Press, 2005.

POSY, Carl J. Kant´s Philosophy of Mathematics, USA: Kluwer Academic Publishers, 1992.

RECK, E.H. From Frege to Wittgenstein - Perspectives on Early Analytic Philosophy. New York: Oxford University Press, 2002.

RISI, V. De. Geometry and Monadology (Leibniz's Analysis Situs and Philosophy of Space). Berlin: Ed.: Birkhauser Basel, 2007.

RUSSELL, B. A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz. New York: Routledge, 2005.

SANTOS, L.H.L dos. O Olho e o Microscópio - A Gênese e os Fundamentos da Lógica segundo Frege. Rio de Janeiro: Nau Editora, 2008.

SCRUTON, R. Introdução à Filosofia Moderna - De Descartes a Wittgenstein. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1981.

SHEPPARD, B. The Logic of Infinity. United Kingdom: Cambridge University Press, 2014.

STRICKLAND, L. Leibniz - The Shorter Leibniz Texts. New York: Continuum, 2006.

SLUGA, H. Gottlob Frege. London and New York: Routledge, 1999.

TAIT, W.W. Frege versus Cantor and Dedekind - On the Concept of Number. USA: University of Chicago, 1993.

TEXTOR, M. On Sense and Reference. London: Ed. Routledge, 2006.

WRIGHT, C. Frege’s Conception of Numbers as Objects. United Kingdom: Aberdeen University Press, 1983.