UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
ESCOLA DE FILOSOFIA, LETRAS E CIÊNCIAS HUMANAS

HENRIQUE MARINS DE CARVALHO

UM ESTUDO DE PROVAS E REFUTAÇÕES DE IMRE LAKATOS

GUARULHOS
2018

HENRIQUE MARINS DE CARVALHO

UM ESTUDO DE PROVAS E REFUTAÇÕES DE IMRE LAKATOS

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Filosofia
Universidade Federal de São Paulo
Área de concentração: Metafísica, ciência e linguagem
Orientação: Tiago Tranjan

GUARULHOS
2018

Carvalho, Henrique Marins de.

Um estudo de Provas e Refutações de Imre Lakatos / Henrique Marins de Carvalho. Guarulhos, 2018.
156 f.

Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Universidade Federal de São Paulo, Escola de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, 2018.
Orientação: Tiago Tranjan.

1. Provas. 2. Refutações. 3. Heurística. I. Orientador. II. Título.

Henrique Marins de Carvalho
Um estudo de Provas e Refutações de Imre Lakatos

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Filosofia
Universidade Federal de São Paulo
Área de concentração: Metafísica, ciência e linguagem

Aprovação: ____/____/________

Prof. Dr. Tiago Tranjan
Universidade Federal de São Paulo

Prof. Dr. João Vergílio Gallerani Cuter
Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Marcelo Silva de Carvalho
Universidade Federal de São Paulo

AGRADECIMENTOS

À minha família.

Aos funcionários da Secretaria de Pós graduação da EFLCH-UNIFESP pela paciência e suporte.

Aos professores do programa de Pós graduação em Filosofia da EFLCH-UNIFESP.

Aos membros da banca examinadora pelas importantes críticas.

Ao meu orientador, prof. Tiago Tranjan, pela dedicação e gentileza desde o início deste trabalho e durante todas as etapas de sua realização.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP).

O dom da imaginação tem mais
significado pra mim que meu talento para
absorver conhecimento.

Albert Einstein (1879-1955)

RESUMO

Proofs and refutations é uma das obras mais importantes do filósofo húngaro Imre Lakatos (1922-1974) e seu tema principal é a avaliação do progresso da matemática; o texto é estruturado como uma narrativa ficcional com o recurso literário de um conjunto de diálogos envolvendo um professor e seus alunos debatendo sobre o teorema de Euler a respeito de poliedros, suas provas e contraexemplos. Esta pesquisa tem enfoque nas ideias de Lakatos sobre o crescimento da matemática em uma perspectiva heurística e está organizada em três partes. A primeira tem como objetivo apresentar breves informações biográficas sobre o autor e comentários sobre as características singulares desta sua produção, bem como os detalhes de sua formação, com destaque para o historicismo e o refutacionismo; na segunda, é apresentada uma reconstrução da obra original, acrescida de comentários. Finalmente, tomando uma posição mais afastada do texto, questões filosóficas substanciais são tratadas, tais como a verdade na matemática, a heurística como método de descoberta científica e o papel das provas e refutações no progresso dessa atividade humana em desenvolvimento, chamada matemática.

Palavras-chave: Provas. Refutações. Heurística.

ABSTRACT

Proofs and Refutations is one of the most important works of the hungarian philosopher Imre Lakatos (1922-1974) and its main topic is the progress evaluation of mathematics. The text is structured as a ficcional story told with the literary resource of a dialogues set involving a teacher and his pupils arguing about the Euler theorem about polyhedra, its proofs and counterexamples. Our research focused in Lakatos ideas about the growth of mathematics in a heuristic perspective and has been set up in three parts. In the first one, aimed to present brief biographical informations about the author and comments about the singular characteristics of this writings of his, joined with details of his intellectual instruction, highlighting historicism and refutationism; in the second one, we sought to present a reconstruction of the original work, joined with comments. Finally, taking a stand somewhat far from the text, we selected and explored substantial philosophical questions concerning the truth, the heuristic as a method of science discovery and the role of the proofs and refutations on the progress of this human activity called mathematics.

Keywords: Proofs. Refutations. Heuristic.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A obra *Proofs and Refutations* de Imre Lakatos (1922-1974) é um trabalho publicado inicialmente como uma série de artigos no periódico da sociedade britânica de Filosofia da Ciência[1] e foi o resultado dos estudos do filósofo húngaro nos primeiros anos do período em que trabalhou em Londres. O texto e seu autor têm características que os tornam relevantes para um estudo no âmbito da Filosofia da Matemática ou da História da Matemática sob um viés filosófico.

Imre Lakatos teve sua formação acadêmica original em filosofia em universidades da Hungria, recebendo influência de autores ligados ao marxismo, tais como György Lukács. Possivelmente, seu interesse pela filosofia da matemática foi influenciado pelos seminários ministrados pelo filólogo Árpád Szabó, cuja pesquisa se dedicava ao surgimento da geometria na Grécia antiga.

Com uma formação acadêmica completa e tendo vivido experiências na política de seu país, Lakatos iniciou a segunda fase de sua vida, aproveitando uma oportunidade de estudos na Inglaterra, sendo que a instituição em que realizou suas atividades (*London School of Economics*) era justamente aquela em que atuava Karl Popper e seu ingresso ocorreu quase simultaneamente à publicação da versão em inglês de "A Lógica da Pesquisa Científica".

O espírito do tempo no departamento de Filosofia da LSE no início da segunda metade do século passado era uma consequência desta relevante obra de Popper, que passou a orientar debates e definir classificações de abordagens; indutivismo *versus* falibilismo, verificação *versus* corroboração, racionalismo *versus* historicismo (ou, para alguns popperianos, racionalismo *versus* irracionalismo)..

Neste efervescente cenário Lakatos começou a expor suas ideias que, ao mesclar – como ele mesmo diz – "ideologias aparentemente incompatíveis", conseguem ser de tal forma que seus críticos o classificam, ao mesmo tempo, como adepto e opositor dos autores que o influenciaram.

[1] *The British Journal for the Philosophy of Science*, fundado em 1950. Atualmente, a sociedade está situada no prédio da *London School of Economics and Political Science* (LSE) que recebeu o nome de Lakatos.<https://www.disabledgo.com/access-guide/london-school-of-economics/the-lakatos-building>

Sua visão a respeito da matemática é distinta das que buscam estabelecer fundamentos e uma ontologia seguros para dar sustento ao desenvolvimento dos teoremas e demonstrações. Considerava um desperdício a empreitada de qualquer escola dogmática, tais como a logicista ou a formalista. Para ele, a formação de conceitos válidos em uma teoria não deve descartar o componente humano que pode ser avaliado pela reconstrução do processo evolucionário nas ações da comunidade dos matemáticos.

Por outro lado, não lhe agradava uma visão que interpretava o desenvolvimento da matemática somente do ponto de vista psicológico ou sócio-histórico; todos os estágios devem sempre ser considerados a partir da razão, mesmo aqueles em que a teoria está em sua formulação ingênua e não formalizada.

Trazendo o falibilismo para o terreno da Matemática (considerada por vários autores como um modelo da verdade inabalável), enquanto buscava racionalizar a ação de descoberta (que muitos relegavam à psicologia), o texto de *Proofs and Refutations* tem como tema central a evolução do conhecimento matemático.

Apesar de ser um estudo de caso sobre um teorema geométrico e de suas demonstrações, a questão tem um escopo mais geral se formulada da seguinte maneira: “como se dá o progresso na Matemática?”.

Para responder à pergunta, em qualquer das formulações, se faz necessário definir o que é Matemática e estabelecer um critério de avaliação do que nela se pode chamar de progresso. Uma definição clara sobre o que é a Matemática não é uma tarefa tão fácil de cumprir, embora, como afirma Hacking (2014), não só para o público em geral, mas até para os cientistas e filósofos, a Matemática seja tomada como certa e pareça dispensar explicação.

“Apenas a experiência ativa em matemática pode responder à questão: o que é matemática?” (Courant e Robbins, 1996), dizem aqueles que a percebem como “um trabalho humano, portanto, com falhas e deficiências” (Langlands, 2010). Para Lakatos (1963), a “atividade matemática é atividade humana... Mas a atividade matemática aliena-se da atividade humana que a produziu e torna-se um organismo vivo e crescente”.

Já que não há uma definição clara e distinta para “Matemática” que seja atraente para todas as linhas de pensamento que a estudam, haveria ao menos um critério para mensurar seu progresso?

Um elemento presente em qualquer estudo a respeito da matemática é a *prova* que tem como entendimento usual uma sequência de sentenças, escritas com simbologia adequada e encadeamento lógico. Lakatos adota a análise da evolução das provas matemáticas como uma forma de avaliação do crescimento do conhecimento, incorporando, no processo de elaboração e aperfeiçoamento da prova os contraexemplos (ou falseadores heurísticos, para usar sua terminologia).

Assim que se apresenta uma tentativa de demonstração de uma proposição matemática, refutações à conjectura (contraexemplos globais) ou às etapas da prova (contraexemplos locais) podem ocorrer. Lakatos considera que um método que incorpore a heurística (tal como ensinada por seu conterrâneo György Pólya) não pode admitir estratégias que busquem apenas o impedimento ou o ajuste dessas anomalias, valendo-se de modificações no domínio ou das redefinições restritivas de conceitos.

Tecendo uma reconstrução do desenvolvimento histórico das provas do teorema de Euler para poliedros (sobre a relação existente entre a quantidade de vértices, faces e arestas), o texto de Lakatos trata de temas característicos da Filosofia da Matemática, como a questão da verdade, do rigor, do incremento de conteúdo e da formação de conceitos.

O presente estudo que apresentamos sobre uma obra central de Imre Lakatos em seu programa filosófico dedica-se a duas propostas: primeiro, realizar uma reconstrução compreensível do texto original capaz de oferecer as ideias mais importantes tanto para um leitor que pretenda iniciar a leitura como para aquele que tenha tido contato há algum tempo e queira dele recordar-se, e, em segundo lugar, discorrer sobre temas selecionados de forma mais abrangente, de forma a situar as propostas lakatosianas no cenário da Filosofia da Matemática.

Sobre a estrutura do trabalho, optou-se pela divisão em três partes, permitindo inicialmente um procedimento mais exegético e depois uma perspectiva mais ampla, em conformidade com os objetivos descritos acima.

A primeira parte traz uma breve biografia, considerações sobre a importância da obra no conjunto das produções acadêmicas do autor e uma seção destinada a apresentar as “fontes ideológicas” controversas assumidas pelo filósofo húngaro: Popper, Hegel e Pólya.

A segunda parte traz comentários de cada uma das seções de *Proofs and Refutations*, a saber:

Experimento mental (quasi-experimento): descrição da demonstração feita por Cauchy em 1811 para o Teorema de Euler-Descartes, constituída por três lemas.

Críticas à demonstração: primeiros questionamentos a respeito dos lemas da demonstração que já levam a ajustes em seus enunciados.

Estratégia da rendição: questões sobre o conceito de prova matemática e sobre a interpretação dada por distintas escolas da Filosofia da Matemática.

Estratégia do impedimento de monstros: ao serem identificados contraexemplos que contrariam o teorema estabelecido, matemáticos podem adotar ações que rejeitem tacitamente as anomalias. Percebe-se a necessidade de se aperfeiçoar definições (ou mesmo enunciá-las pela primeira vez).

Estratégia de impedimento de exceções: reformulação do enunciado da conjectura original para definir um domínio de validade restritivo. É colocado em questão aqui o princípio de "provas definitivas", fundamental às escolas logicista e formalista.

Estratégia do ajuste de monstros: a partir de uma interpretação diferente e da reformulação de definições, alguns contraexemplos poderiam ser reexaminados e passariam a fazer parte do conjunto de objetos para os quais o teorema e sua prova são válidos.

Aperfeiçoamento da conjectura pelo método da incorporação de lema: análise das exceções e contraexemplos e incorporação dos lemas no próprio enunciado do teorema para garantir sua validade para o conjunto de poliedros desejado. É nesse ponto que Lakatos apresenta sua proposta que emprega as refutações como elementos imprescindíveis para a reformulação da conjectura inicial.

A aplicação deste método é base para questões sobre a dinâmica dos valores de verdade (e falsidade) em um sistema empírico ou em um sistema dedutivo e sobre a relação entre a proposição de um teorema e sua prova.

Crítica da análise de prova por contraexemplos que são globais, mas não locais. O problema do rigor: Tendo definido uma classificação dos contraexemplos, o método de incorporação de lema é rebatizado (uma primeira vez) para "método de prova e refutações" e descrito como um conjunto de regras heurísticas que visam analisar os contraexemplos, esclarecer os lemas ocultos e reescrever o enunciado para eliminar os contraexemplos críticos.

É destacada a importância das refutações como motor para o aperfeiçoamento do teorema e de sua prova. A lógica da descoberta é descrita como um procedimento racional e que não necessita ser baseado no psicologismo.

Prova versus análise de prova. O relativismo dos conceitos de teorema e rigor na análise de prova: Em uma reconstrução histórica, Lakatos discute o rigor matemático e o impacto de sua busca no século XIX, especialmente por Weierstrass e Cantor. Relata as incursões dos indutivistas, logicistas e estruturalistas nesse campo de batalha e apresenta sua alternativa apoiada em uma abordagem falibilista.

Crítica da prova por contraexemplos que são locais, mas não globais. O problema do conteúdo: Após apresentar outras provas do teorema (de Gergonne e Legendre), o método é finalmente denominado “método de provas e refutações”, com a inclusão de outra regra heurística que, partindo da análise das refutações, pode levar à proposição de novas demonstrações que ampliem o conteúdo.

Baseado em um estudo de Pólya, nesta seção se investiga o processo de intuição e raciocínio que retira de um conjunto de dados e observações uma conjectura ingênua, e sugere o exercício de um experimento mental que dá início ao método de provas e refutações.

Formação de conceitos: Fazendo uma revisão de todas as estratégias apresentadas até se chegar ao método de provas e refutações, Lakatos sugere que assim como a demonstração é aprimorada, os conceitos também o são e, mais drasticamente, propõe que a linguagem utilizada para se falar sobre essas ideias e demonstrações é igualmente modificada a cada refutação.

Como a crítica pode tornar verdade matemática em verdade lógica: Apresentando lado a lado o que chama de interpretação justificacionista e interpretação crítica, o tema desta seção é a verdade de uma proposição matemática. A primeira interpretação busca uma verdade definitiva, precisa e absoluta; a segunda é mais maleável, aceitando que há um crescimento constante dado pelo procedimento heurístico.

Na terceira etapa do trabalho, encontram-se os temas selecionados para discussão, sempre visando identificar qual é sua importância no método de provas e refutações de Lakatos e, em contrapartida, qual é o impacto de um programa com viés heurístico em seu estudo.

A escolha das questões tratadas nesta terceira parte adotou o sentido contrário do desenvolvimento de *Proofs and refutations* (e, consequentemente, da ordem assumida na primeira parte do trabalho), assim temos as seguintes seções:

Verdade matemática: observando as concepções a respeito dos entes matemáticos ao longo da história, são identificados dois modelos principais para a avaliação do progresso da matemática atual, o euclidiano e o kantiano.

Heurística: o conceito de heurística, obtido da teoria de Pólya é aperfeiçoado por Lakatos como uma possível racionalização do processo de descoberta na matemática. Trata-se também da influência de uma metodologia heurística na formação dos conceitos matemáticos.

Rigor: o desejo dos matemáticos de manter o rigor em suas provas é avaliado, principalmente no período após a criação do cálculo infinitesimal. Esta seção faz uso de ideias apresentadas nas seções *Verdade matemática* e *Heurística*, pois a classificação de um sistema como rigoroso está atrelado ao critério de verdade que se estabelece e, se esta construção de um sistema dotado de rigor for interpretada como um processo heurístico, deve ser definido um parâmetro para avaliar seu sucesso. O incremento de conteúdo, que também estabelece conexão com a ideia de uma evolução constante na formação de conceitos serve como parâmetro para tal avaliação.

Experimentos mentais: retoma o ponto de partida do texto de Lakatos e está dedicada aos processos de enunciar, provar e refutar uma conjectura. Primeiro é reforçado o argumento que avalia negativamente, em um processo que pretende avançar o conhecimento da Matemática, as estratégias que excluem tacitamente os contraexemplos do domínio do teorema ou que meramente procuram ajustá-lo com sentenças *ad hoc*.

O binômio prova-refutação e sua participação no progresso da matemática é objeto da seção que encerra o estudo, interpretado com o auxílio das ideias da análise (e síntese) de Pappus e Descartes.

2 O AUTOR E SUA OBRA

2.1 IMRE LAKATOS (1922-1974)

Imre Lipsitz nasceu em 9 de novembro de 1922, na cidade de Debrecen, Hungria, em uma família de cultura judaica. A situação político-social na época de sua juventude era marcada pelas consequências da 1ª Guerra Mundial: a Hungria havia sofrido redução de dois terços de seu território e população, em 1920, nos termos do Acordo de Trianon.

Com a eclosão da 2ª Grande Guerra, a Hungria lutou contra os soviéticos, estabelecendo uma aliança com a Alemanha que era vista, num primeiro momento, com esperança por parte da população. No entanto, as restrições econômicas, o massacre dos soldados húngaros e o descontentamento gerado por condutas antissemíticas levaram líderes húngaros a buscar pactos secretos com os aliados que, quando descobertos, foram o motivo da agressiva invasão nazista, em 1944.

Vários amigos e familiares (inclusive a mãe e a avó) de Lakatos foram presos e deportados, vindo a morrer em campos de concentração como o de Auschwitz. Lakatos não teve o mesmo destino, pois se escondeu sob uma identidade falsa (Tibor Molnár), enquanto atuou em um grupo de resistência comunista.

Após a "libertação" do território húngaro pelo exército russo, em 1945, efetuou uma segunda mudança de nome, adotando o nome Imre Lakatos. Provavelmente a escolha do nome foi uma homenagem ao General Géza Lakatos, líder de uma ação contra o então primeiro ministro Döme Sztójay, um fantoche dos nazistas, responsável por diversas agressões aos judeus húngaros. Nesta época, Lakatos alterou não somente seu nome, como sua crença, tendo se convertido para o cristianismo de inclinação calvinista (WORRALL, 1974).

No âmbito político, atuou em grupos marxistas considerados subversivos durante a Segunda Guerra e, depois de 1945, tornou-se um membro ativo do novo partido comunista que passara a exercer o governo da república húngara. De acordo com Long (2002, p. 271), Lakatos "era conhecido nos altos escalões e designado para trabalhos relevantes do partido. Sem dúvida, seus esforços de recrutamento, seu brilho, sua dedicação e sua energia foram suficientes para que ele fosse notado naqueles primeiros meses da organização comunista na Hungria."

Em 1947, passou a ocupar um cargo no Ministério da Educação com a responsabilidade de realizar uma reforma democrática da educação superior e zelar pelas políticas de cultura do partido comunista. Neste período foi orientado pelo filósofo György Lukács e publicou textos sobre política e literatura.

Teve contato, em 1949, com membros da Universidade de Moscou e, em 1950, foi detido, acusado de revisionismo, tendo permanecido preso por quatro anos. O motivo exato de sua prisão não é claro, mas certamente o comportamento de Lakatos lhe rendeu inimigos dentro do próprio partido (MOTTERLINI, 2002).

No que diz respeito à sua formação acadêmica, estudou Matemática, Física e Filosofia na Universidade de Debrecen. Após a Guerra, completou seus estudos no Eötvös Collegium, em Budapeste.

Em 1956, deixou a Hungria em direção a Viena e, em 1957, com financiamento da fundação Rockefeller, iniciou seu doutoramento no King's College, sob a orientação do professor R. B. Braithwaite. Obtendo seu título de Ph.D. em 1960, passou a trabalhar na London School of Economics (LSE), onde permaneceu até o dia 2 de fevereiro de 1974, quando faleceu, vítima de um ataque cardíaco.

A respeito da figura humana de Lakatos, destacamos o comentário do seu colaborador e colega John Worral que, no primeiro parágrafo do obituário publicado no periódico *Journal for General Philosophy of Science*, diz que, com o falecimento de Imre Lakatos, "o mundo intelectual perdeu não apenas um filósofo importante e influente como também um ser humano excepcional." (WORRAL, 1974, p. 211)

Em relação a sua pesquisa e produção, tanto o programa de Filosofia da Matemática iniciado em 1961 como sua metodologia na Filosofia da Ciência foram, infelizmente, prejudicados de forma abrupta por sua morte, como indica o mesmo Worral:

> Imre Lakatos deixa para trás uma quantidade de material inédito e um conjunto de planos de réplicas para responder a alguns de seus críticos (como Kuhn, Feyerabend e Toulmin, pois a metodologia de Lakatos se tornou um dos pontos focais do debate na filosofia da ciência) e eventualmente aplicar suas ideias metodológicas a outros campos. Felizmente ele também deixa para trás (e foi desta conquista que ele estava mais orgulhoso) um próspero programa de pesquisa, na London School of Economics e em outros lugares, constituído por jovens eruditos empenhados em desenvolver e criticar suas ideias estimulantes e aplicá-las em novas áreas. (WORRAL, 1974, p. 217)

Considerando o trabalho de Lakatos na Filosofia da Matemática, destacamos a publicação *Proofs and Refutations* que é, na próxima seção, identificada como linha mestra do pensamento do filósofo ao longo de quase duas décadas de sua atividade acadêmica.

2.2 PROOFS AND REFUTATIONS

2.2.1 LOCALIZAÇÃO NO ÂMBITO DA PRODUÇÃO BIBLIOGRÁFICA DE LAKATOS

Com o intuito de situar a obra *Proofs and Refutations* no âmbito da produção bibliográfica de Lakatos, apresentamos uma seleção de seus trabalhos, realizados após sua mudança para a Inglaterra, em seus estudos de doutoramento e como professor na LSE, extraídos da coletânea feita por Kutrovatz (2008).

(1) 1961 *Essays in the Logic of Mathematical Discovery*
(2) 1962 *Infinite Regress and Foundations of Mathematics*
(3) 1963–4 *Proofs and Refutations*
(4) 1966 *Cauchy and the Continuum: the Significance of Non-Standard Analysis for the History and Philosophy of Mathematics*
(5) 1967 *A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics*
(6) 1967 (ed.) *Problems in the Philosophy of Mathematics*
(7) 1968 *Criticism and the Methodology of Scientific Research Programmes*
(8) 1968 *Changes in the Problem of Inductive Logic*
(9) 1968 (ed.) *The Problem of Inductive Logic*
(10) 1970 *Falsification and the Methodology of Scientific Research Programmes*
(11) 1970 *Criticism and the Growth of Knowledge* (ed. com A. Musgrave)
(12) 1971 *The History of Science and its rational reconstructions*
(13) 1974 *Popper on Demarcation and Induction (u*m capítulo de The Philosophy of Karl Popper editado por P. A. Schilpp).
(14) 1974 *Science and Pseudoscience*.
(15) 1976 *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, editado por J. Worrall e E.G. Zahar.
(16) 1976 *Why did Copernicus's programme supersede Ptolemy's?* com colaboração de E.G. Zahar.
(17) 1978 *The method of analysis-synthesis*.

A obra *Proofs and Refutations* (3), foi publicada como um artigo, dividido em quatro partes, no *British Journal for the Philosophy of Science*, respectivamente nos meses de maio, agosto e novembro de 1963 e fevereiro de 1964, contendo partes de seu trabalho de doutoramento intitulado *Essays in the Logic of Mathematical Discovery* (1), produzido no King’s College da Universidade de Cambridge, no período de 1956 a 1959, sob a supervisão do Prof. Richard Bevan Braithwaite.

Lakatos pretendia organizar conteúdos de sua tese e outros artigos para a publicação de um livro e, no verão de 1973, discutiu com seus colegas Elie Zahar e John Worrall os projetos para tal obra que, infelizmente, não conseguiu executar antes de sua morte.

Zahar e Worral assumiram então a tarefa e, em 1976, foi impresso, sob o título *Proofs and Refutations: the Logic of Mathematical Discovery* (15) o trabalho em que foi acrescido ao texto publicado em 1963-64 um complemento baseado nos capítulos ainda não publicados de sua tese, além de comentários dos editores.

Os incrementos ao texto original de 1963-64 contemplam outra prova do teorema de Euler-Descartes de autoria de Poincaré com o emprego de álgebra vetorial, além de um estudo de caso com a aplicação do método de provas e refutações a um teorema de Cauchy no âmbito de análise real.

A respeito das demais produções listadas anteriormente, seguem breves sinopses, considerando suas relações com *Proofs and Refutations* no desenvolvimento das ideias de Lakatos.

O artigo *Infinite Regress and Foundations of Mathematics* (2) discute uma questão epistemológica presente no debate entre dogmáticos e céticos sobre a possibilidade de se estabelecer simultaneamente o absoluto sentido e a plena verdade na Matemática. Lakatos inicia o estudo pelo argumento cético da regressão infinita que indaga:

> Como pode a filosofia da matemática ainda alegar que na matemática temos ou deveríamos ter conceitos exatos? [...] E mesmo assumindo os conceitos ‘exatos’, como provar que uma proposição é verdadeira? Significado e verdade podem somente ser transferidos, mas não estabelecidos. Mas se é assim, como podemos saber? (LAKATOS, 1997b)

As tentativas de solução dada pelo logicismo, indutivismo ou pela meta-matemática pretendem interromper a regressão infinita pela formulação de “fundamentos da matemática” que permitiriam ao ser humano, por suas capacidades intelectuais, ser capaz de conhecer as verdades matemáticas.

Lakatos identifica nas atividades dos matemáticos e filósofos que trabalharam no esforço de estabelecer definitivamente os fundamentos da Matemática um exercício racional em que estão presentes algumas das estratégias de argumentação exploradas também em *Proofs and Refutations*, como o “impedimento de monstros” e a busca por esclarecer os lemas ocultos.

Em suas críticas, Lakatos indica que a regressão infinita é irremediável e sugere como alternativa uma abordagem mais flexível que incorpore o falibilismo, sem gastar esforços na perseguição de uma base última e definitiva.

Esse tema é retomado de forma abreviada na introdução de P&R quando apresenta explicitamente que seu objetivo é “desafiar o formalismo matemático” e propor que “a Matemática não cresce pelo incremento monótono de teoremas indubitáveis, mas pela incessante evolução de conjecturas, pela especulação e pela crítica.” (LAKATOS, 1977, p. 5)

Cauchy and the Continuum (4) é uma aplicação do método de provas e refutações e da estratégia de uma reconstrução racional do desenvolvimento do conceito de convergência uniforme de funções nos trabalhos de Cauchy e Weierstrass e, como já mencionado, foi incorporado na publicação de *Proofs and Refutations: the Logic of Mathematical Discovery* (15).

A definição da Matemática como uma ciência quasi-empírica e as consequências dessa abordagem são o tema de *A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics* (5), que detalha elementos já apresentados em P&R, como a análise de prova e os falsificadores lógicos e heurísticos.

O artigo publicado postumamente *The method of analysis-synthesis* (17) traz um epílogo de P&R, com discussões sobre o papel da análise e da síntese em uma revisão da prova dada por Cauchy para o teorema de Euler para poliedros.

As publicações no período de 1968 a 1974 são mais facilmente relacionadas às contribuições de Lakatos à Filosofia da Ciência (embora ele próprio talvez não ratificasse essa distinção), quando divulgou sua Metodologia dos Programas de Pesquisa Científica como uma alternativa ao irracionalismo e ao falsificacionismo extremo.

Esta metodologia é apresentada no campo das ciências naturais e não trata explicitamente de Matemática, porém, em sua formulação há elementos que também são valiosos em *Proofs and Refutations*, como a reconstrução histórica e métodos como o "impedimento de monstros" e o "impedimento de exceções".

Por esse panorama da bibliografia de Lakatos, destacamos a relevância de *Proofs and Refutations* em sua proposta para a Filosofia da Matemática, que valoriza a avaliação do crescimento do conhecimento matemático, com uma aplicação inesperada de uma discussão que se travava na Filosofia da ciência (falibilismo, refutação etc.) à Matemática, que até então havia sido alvo, quase exclusivamente de projetos fundacionistas ou psicologistas.

2.2.2 CARACTERÍSTICAS GERAIS

Proofs and Refutations é um texto com características pouco usuais em um ensaio filosófico moderno e Kadvany classifica a obra como um *Bildungsroman* (romance de formação), isto é, um gênero literário que

> proporciona um modelo para acompanhar o desenvolvimento de um personagem e simultaneamente pinta um quadro da cultura em que o herói obtém seus valores, habilidades e interesses. Ele nos conduz num caminho educacional que começa com um herói ingênuo (ungebildet) e finaliza quando este herói tiver alcançado certo nível de maturidade através de experiências cumulativas de formação de caráter. (KADVANY, 1989, p. 32)

O herói, neste caso, não é um indivíduo, mas uma conjectura matemática: o Teorema de Euler-Descartes, proposição a respeito de poliedros que afirma que, sendo V o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces, vale a relação $V + F - A = 2$. O ambiente em que esse personagem se encontra é o debate em uma sala de aula fictícia em que o Professor (que não recebe um nome próprio) dialoga com seus estudantes, identificados pelas letras do alfabeto grego (Alfa, Beta, Gama etc).

Neste diálogo ficcional, as posições defendidas acerca da conjectura matemática e de sua demonstração remetem a ideias de diversos matemáticos e escolas filosóficas. É, portanto, uma sala de aula frequentada por personagens que possuem habilidades argumentativas similares às de Kepler, Euler, Cauchy, Poincaré – e Lakatos afirma, com bom humor (uma característica notável na obra) que "esta classe é assaz avançada." (LAKATOS, 1963, p. 8)

Outra característica é a efusão de detalhes apresentados nas notas de rodapé[2] e Kiss (2006) concorda com Lakatos quando afirma que são essas informações que contam a “história real” da Matemática, enquanto o diálogo dos personagens na sala de aula dá conta de realizar sua “reconstrução racional”.

As notas de rodapé são utilizadas várias vezes ao longo do texto para indicar que na fala de um dos personagens há uma reprodução literal (ou quase) de uma afirmação extraída de uma das fontes presentes nas referências bibliográficas. Por exemplo, logo no início do diálogo, quando o Professor indaga se algum dos presentes obteve uma prova para a conjectura sobre os poliedros, o aluno Sigma afirma que:

> Eu devo admitir que ainda não fui capaz de vislumbrar uma prova direta deste teorema [...] No entanto, como a verdade tem-se estabelecido em muitos casos, não pode haver dúvida de que ele é válido para qualquer sólido. Assim, a proposta parece ser satisfatoriamente demonstrada. (LAKATOS, 1977, p. 7)

Esta manifestação do aluno Sigma – conforme explica a nota de rodapé associada – é uma reprodução exata de um trecho da obra *Elementa Doctrinae Solidorum* (Elementos da doutrina dos sólidos), de autoria de Leonard Euler, datada de novembro de 1750.

Outro uso das notas de rodapé é indicar em que obras podem ser encontradas as ideias defendidas por algum personagem. Por exemplo, a exclamação do aluno Delta após a primeira sugestão de prova feita pelo professor “Deve chamá-lo, agora, de Teorema. Não há mais nada conjectural a respeito disso” é associada, na nota de rodapé, aos textos de matemáticos que poderiam se identificar com a afirmação de Delta:

> A visão de Delta de que esta prova estabelecera um ‘teorema’ além de qualquer dúvida foi compartilhada por muitos matemáticos no século XIX, por exemplo Crelle [1826-27, II, pp. 668-671], Matthiessen [1863, p. 449], Jonquieres [1890a, 1890 b]. Para citar uma passagem característica: ‘Após a prova de Cauchy, tornou-se absolutamente indubitável que a elegante relação V+F=A+2 se aplica a todo tipo de poliedros, assim como Euler declarou em 1752. Em 1811 toda a indecisão deveria ter desaparecido’ Jonquieres [1890a, pp. 111-112]. (LAKATOS, 1977, p. 8)

---

[2] Em uma carta constante do acervo de Lakatos na biblioteca da LSE, há uma resposta de Gilbert Ryle, editor da revista *Mind* acerca da submissão do texto de *Proofs and Refutations* dizendo que considerava de “algum interesse” duas ou três páginas que havia lido, mas com críticas severas à prática de incluir excessivas notas de rodapé.

Com relação à estrutura de *Proofs and Refutations*, as quatro partes publicadas de maio de 1963 a fevereiro de 1964, estão divididas em nove seções, cujos títulos estão listados abaixo:

- Um problema e uma conjectura.
- Uma prova.
- Crítica da prova por contraexemplos que são locais, mas não globais.
- Crítica da conjectura por contraexemplos globais.
- Crítica da análise da prova por contraexemplos que são globais, mas não locais. O problema do rigor.
- Retorno à crítica da prova por contraexemplos que são locais, mas não globais. O problema do conteúdo.
- O problema do conteúdo revisitado.
- Formação de conceitos.
- Como a crítica pode tornar verdade matemática em verdade lógica.

Nas duas primeiras seções são apresentados o teorema de Euler e a prova de Cauchy, composta de três lemas e classificada por Lakatos como um experimento de raciocínio (ou um quasi-experimento).

Os contraexemplos que surgem são classificados como locais quando contrariam apenas um dos lemas (mas sem afetar a relação $V + F - A = 2$), e globais quando afetam a conjectura inicial diretamente (de modo que a relação $V + F - A = 2$ parece não mais se manter).

Assim, a seção 3 trata dos contraexemplos locais e a seção 4 dos globais, relacionando então os procedimentos adotados, a partir dessas refutações, para a manutenção da validade da conjectura e da prova. São apresentadas, em viés crítico, algumas estratégias para lidar com os contraexemplos, como a estratégia da desistência, do impedimento de monstros, da exclusão por partes e de incorporação de lemas.

Na seção 5, o método de Lakatos é formulado, a partir da análise da prova e dos questionamentos sobre o rigor e sobre a existência de lemas ocultos. Trata-se do método que dá nome à obra, com um conjunto de regras racionais para proceder, partindo de uma conjectura inicial, em direção a um teorema aperfeiçoado.

As seções 6 e 7 analisam a relação entre a sofisticação da prova e o conteúdo dos teoremas, a presença de características indutivas e dedutivas no método de Provas e Refutações e a classificação dos contraexemplos em heurísticos ou lógicos.

Questões sobre a formação de conceitos são contempladas na seção 8, que diferencia os conceitos originários daqueles gerados pelas provas e sugere uma análise crítica da evolução dos conceitos pelas refutações.

A última seção tem o ambicioso tema da verdade ou, ainda, das verdades matemática e lógica, e avalia como o procedimento de ampliação de conceito pode ser útil para a transição de uma para outra.

2.3 FONTES IDEOLÓGICAS

A respeito das fontes, na introdução de seu trabalho de Ph.D., que veio a se tornar *Proofs and Refutations*, Lakatos traz a seguinte justificativa: “as três maiores e aparentemente incompatíveis fontes ‘ideológicas’ da tese são a heurística matemática de Pólya, a dialética de Hegel e a filosofia crítica de Popper” (LAKATOS, apud LARVOR, 1998). Na publicação de P&R, ele reforça: “este artigo deve ser lido no contexto da revitalização da heurística matemática de Pólya e da filosofia crítica de Popper.” (LAKATOS, 1963a, p. 1)

Em virtude dessa multiplicidade, não se identifica uma influência estrita, com reproduções intactas das ideias ou conceitos de cada um desses autores (Popper, Hegel ou Pólya), mas atributos oriundos dessa tríade falseabilista-historicista-heurística.

Como parte importante do estudo da obra *Proofs and Refutations*, as próximas seções serão dedicadas às peculiaridades de suas declaradas fontes.

2.3.1 RACIONALIDADE E REFUTAÇÕES

Quando Lakatos chegou a Londres, em 1957, completava-se cerca de uma década que Karl Popper havia se tornado professor da *London School of Economics*, e mais de duas décadas da publicação de sua obra *Logik der Forschung* (A Lógica da Pesquisa Científica), estabelecendo as bases do racionalismo crítico, que rejeitava as propostas indutivistas e definia como parâmetro de demarcação da ciência o potencial de falseabilidade.

O trabalho de Popper já havia se tornado uma referência importante nas produções e estudos filosóficos, principalmente na Inglaterra, onde já se identificava a formação de um grupo de seguidores. Qual foi a influência de Popper e de suas ideias sobre o desenvolvimento do recém-chegado professor húngaro a Londres?

Lakatos escreveria, anos mais tarde, em um capítulo que seria incluído na coletânea sobre Popper editada por Schilpp, a seguinte declaração:

> As ideias de Popper representam o desenvolvimento mais importante da Filosofia do século XX. [...] Pessoalmente, minha dívida com ele é imensurável; mais que qualquer um, ele mudou minha vida. Eu tinha cerca de quarenta anos quando entrei no campo magnético de seu intelecto. (LAKATOS, 1978, apud WATKINS, 2002, p. 4)

No período de 11 a 17 de julho de 1965, Lakatos foi um dos responsáveis pela organização do Seminário Internacional sobre Filosofia da Ciência de 1965, do qual participaram Popper, Kuhn, Feyerabend, Carnap, dentre outros. Nas atas desse evento foram incluídos dois artigos com o propósito de defender as ideias de Popper de ataques realizados por Carnap e Kuhn.

O motivo da discordância de Carnap era o confronto de sua teoria da confirmação com a teoria da corroboração de Popper e a defesa foi feita por Lakatos no artigo intitulado *Changes in the Problem of Inductive Logic*. A questão levantada por Kuhn tinha outro aspecto e reivindicava que o desenvolvimento científico não se fazia pelas refutações de teorias após experimentos críticos, mas por um sistema que deveria assumir aspectos sociais, psicológicos e históricos.

Nas reminiscências de Donald Gillies, que desenvolvia seus estudos de doutoramento sob a orientação de Lakatos na época da realização deste Seminário, "tudo ia bem enquanto Lakatos escrevia contra Carnap, mas a defesa de Popper contra Kuhn se tornou uma crítica de Popper e o desenvolvimento de uma nova abordagem do método científico." (GILLIES, 2002, p.15)

A partir da análise dos pontos criticados, Lakatos propôs uma alternativa que pudesse garantir uma reconstrução racional do desenvolvimento histórico da Ciência (e, por consequência, da Matemática), definir claramente um critério de demarcação e, ainda, estabelecer uma forma eficaz de avaliar o progresso. Surgia, então, a Metodologia dos Programas de Pesquisa Científica.

As propostas de Lakatos para a Filosofia da Matemática, assim como para a Filosofia da Ciência, não são, portanto, meras reproduções dos escritos de Popper. Há pontos de discordância sensíveis em alguns aspectos, mas Watkins (2002, p. 4) avalia isso de forma positiva e diz que "a exposição de um grande equívoco do mestre feita pelo discípulo é a seiva do progresso intelectual." Sob essa ótica, Lakatos procurava apresentar uma evolução das ideias de Popper no desenvolvimento de sua própria filosofia.

Ao longo deste estudo serão assinaladas as evidências do impacto das ideias de Popper na obra de Lakatos, em especial em *Proofs and Refutations*, bem como os pontos de dissonância. Sobre as similaridades, uma verificação que se faz sem nenhuma dificuldade é a coincidência do título dos artigos de Lakatos com o da obra de Popper, também publicada em 1963*, Conjectures and Refutations: the growth of Scientific Knowledge*, além da já mencionada referência explícita nas introduções tanto de sua tese como de P&R.

A obra de Lakatos é muitas vezes[3] interpretada como um exercício da transposição das ideias de Popper (dedicadas às ciências naturais) para a área da Matemática, pelo uso do falibilismo, isto é, a percepção de que qualquer teoria temporariamente aceita pode se revelar falsa ou, em outras palavras, de que nenhuma é absolutamente e definitivamente certa.

A aplicação do falibilismo à matemática, por si só, já constitui um desenvolvimento inovador da abordagem popperiana. De fato, na visão quase unânime de filósofos e matemáticos, das mais diferentes tendências, a matemática era uma ciência dedutiva, estritamente ligada à lógica e à certeza.

O próprio Popper acabou reconhecendo o núcleo de consonância entre seu trabalho e o de Lakatos quando disse que "o ponto principal que devo à filosofia da matemática de Lakatos é que a matemática (e não somente as ciências naturais) cresce por meio da crítica de suposições e robustas provas informais." (POPPER, 1981, p.136)

O falibilismo de Lakatos contempla um desenvolvimento conceitual intrínseco, já que sua crítica das provas contempla os contraexemplos e a produção de novas conjecturas para o aperfeiçoamento da teoria inicialmente proposta. Uma teoria

---

[3] Glas (2001) menciona que os seguintes autores (cujos trabalhos são indicados) compreendem que a obra de Lakatos tem um viés crítico-falibilista: Anapolitanos, D. A. (Proofs and Refutations: A Reassessment), Corfield, D. (Assaying Lakatos's Philosophy of Mathematics), Ernest, P. (The Legacy of Lakatos: Reconceptualizing the Philosophy of Mathematics) e Sherry, D. (On Mathematical Error)

refutada não é sumariamente descartada, mas ocupa um papel importante no processo evolutivo.

2.3.2 Dialética e Historicidade

Larvor (1998) afirma que, em uma carta a Marx Wartofsky, Lakatos expressou o desejo de se tornar o fundador de uma escola dialética na Filosofia da Matemática, especialmente no sentido que é atribuído a essa expressão no desenvolvimento de conceitos, evoluindo de um início simplório para uma forma mais rica e sofisticada.

A dialética pode ser descrita como uma fórmula de três passos: tese, antítese e síntese e, tratando-se de *Proofs and Refutations*, em que o mote central é o aprofundamento conceitual gerado pela análise dos contraexemplos e das refutações, a dialética não é meramente um recurso literário, como aponta Kadvany:

> O raciocínio dialético não é apenas um ‘ornamento estilístico’ na filosofia lakatosiana, ele nos mostra um processo educativo, a aventura intelectual do Espírito Matemático, assim como a abordagem de Hegel na Fenomenologia do Espírito. Quando contrasta os tratamentos dedutivista e heurístico para resultados matemáticos, Lakatos usa termos hegelianos: tese (conjectura primitiva) - antítese (contraexemplos) - síntese (teorema aperfeiçoado e conceito gerado pela prova). (KADVANY, 1989, p. 29)

Apesar desse paralelo proposto por Kadvany e mesmo da apresentação feita por Lakatos das suas “fontes ideológicas”, Motterlini (2002) ressalta que não se localiza nos registros do filósofo húngaro informações sobre quais obras específicas de Hegel o influenciaram. É certo, no entanto, que sua formação ainda na Universidade de Debrecen, no período de 1940 a 1944, teve forte presença das teorias hegelianas identificadas em uma corrente acadêmica marxista e grande influência na Hungria e países vizinhos.

Assim, o mais provável é que Lakatos tenha assimilado elementos da filosofia de Hegel indiretamente pelas obras de Marx, Lenin, Erik Molnár, Stalin e Béla Fogarasi, estudadas durante sua permanência como aluno e posteriormente como professor em escolas secundárias e no Instituto de Matemática em Budapeste, conforme relata Ropolyi (2002). Foram também marcantes em sua formação marxista (e consequentemente hegeliana) os debates travados com Árpád Szabó e György Lukács em seminários de que participou.

Assim como mencionado a respeito da influência sofrida pelo contato com Popper, Lakatos não se tornou um mero propagador das ideias de suas fontes, mas criou propostas próprias que chegam a causar conflito em temas centrais.

Por exemplo, notamos que Lakatos não concorda com a caracterização da Matemática feita pelo eminente filósofo alemão na Fenomenologia do Espírito, como um reino de proposições rígidas, inerte e sem vida. A Matemática, na interpretação de Lakatos, é originada na ação humana e, de certa forma, ganha vida como ele afirma:

> A Matemática, este produto da atividade humana, aliena-se da atividade humana que a esteve produzindo. Ela torna-se um organismo vivo e crescente que adquire certa autonomia da atividade que a produziu; desenvolve suas próprias leis autônomas de crescimento, sua própria dialética. O matemático criativo genuíno é apenas uma personificação, uma encarnação destas leis que só podem se realizar na ação humana. Sua encarnação, no entanto, é raramente perfeita . (LAKATOS, 1977, p. 146)

Motterlini (2002) sugere, então, que a maior influência de Hegel identificável em Lakatos seria a capacidade de olhar para o processo de descoberta de uma forma diferente, assumindo que o crescimento da Matemática, bem como da Ciência, não é somente uma de suas características: é sua própria essência.

Currie (1979, p. 336), em sua resenha de *Proofs and Refutations*, também reconhece que, para Lakatos, a Matemática é bem diferente de um reino de verdades estabelecidas, constituindo-se como resultado das intuições e suposições bem sucedidas, já que "na Matemática, nós não sabemos, podemos somente supor, mas algumas de nossas suposições podem ser melhores, mais frutíferas que outras."

A ênfase na evolução do conhecimento faz com que a filosofia lakatosiana valorize os aspectos sociais e históricos, como o próprio autor afirma na introdução do ensaio História da Ciência e suas Reconstruções Racionais, parafraseando Kant:

> A filosofia da Ciência sem a História da Ciência é vazia. A História da Ciência sem a Filosofia da Ciência é cega [...] este ensaio tem a intenção de explicar de que maneira a historiografia da ciência deveria aprender com a filosofia da ciência e vice-versa. Demonstrar-se-á que: a) a filosofia da ciência fornece metodologias normativas segundo as quais o historiador reconstrói a «história interna» e desse modo fornece uma explicação racional do desenvolvimento do conhecimento objetivo; (b) duas metodologias em competição podem ser avaliadas com o auxílio da história (interpelada normativamente); c) qualquer reconstrução racional da história necessita de ser completada por uma «história externa» empírica (sociopsicológica). (LAKATOS, 1970, p. 91)

Esta percepção da história como instrumento de avaliação de teorias científicas é também uma faceta de sua formação acadêmica original, que o fez preferir a “racionalidade dialética” em oposição à “mistificação irracional”.

Seguindo o argumento adotado por Lakatos, a história não deve ter o papel de justificar uma teoria científica ou social, mas deve ser escrita e investigada paralelamente à Filosofia, já que pode servir como instrumento de avaliação do progresso de teorias, a partir de estágios de elaboração de hipóteses, realização de testes e formalização de um corpo de conhecimentos.

Koertge (1976) compara o papel das reconstruções históricas da ciência – como ferramentas para a pesquisa filosófica – à atividade de um arqueólogo que, tendo em suas mãos fragmentos de uma peça como um vaso ou um manuscrito, assume, baseado em teorias prévias, qual deveria ser o formato original do objeto e, a partir destas premissas, procura unir os pedaços existentes ou mesmo produzir as peças que faltam para torná-lo completo novamente.

Já que este processo de reconstrução do item arqueológico demanda “interpolações ou idealizações, o historiador se baseia em uma atribuição mínima de racionalidade aos atores do passado e assume que suas ações eram respostas adequadas para os problemas enfrentados.” (KOERTGE, 1976, p. 360)

A história deve, portanto, permitir que se percebam os padrões de crítica, de defesas e mudanças de sistemas que visam explicar os fenômenos e levar ao reconhecimento de que o conhecimento é falível e, consequentemente, refutável.

Voltando à paráfrase sobre as relações entre Filosofia e História da ciência em geral (e da matemática, em particular), o filósofo deve preencher suas reflexões com o material que a investigação histórica fornece, mas deve manter cautelosa distância, para não cometer o erro de considerar que uma teoria construída sobre elementos históricos, por mais robusta que seja, possa se tornar irrefutável.

Ao observar o desenvolvimento da matemática por uma via histórica, assim como o arqueólogo ao juntar as peças de um vaso antigo, o filósofo atua com bases racionais para selecionar os eventos relevantes e construir uma narrativa coerente que mostre as conexões desse processo evolutivo.

Para Lakatos (1971, p. 118), esta atividade não se restringe ao caráter descritivo ou externalista, mas deve se ocupar da escrita de uma “história normativamente interpretada” em que se possam identificar os “juízos normativos básicos” dos cientistas.

A história da ciência, assim como a dialética, são incorporadas, na proposta de Lakatos, em uma metodologia construída sobre uma versão do falibilismo e cujo interesse primordial é a questão do progresso científico.

2.3.3 HEURÍSTICA

O trabalho do filósofo da Matemática, para Lakatos, não é apenas observar o produto final do processo de investigação e sua justificação, mas examinar todo o desenvolvimento, em uma dialética influenciada pelas concepções da epistemologia e da lógica. Essa apreciação do processo de evolução do conhecimento é possivelmente a maior evidência da influência de György Pólya[4] sobre Lakatos.

Hegel e Popper, mencionados anteriormente, são nomes celebrizados nos textos de Filosofia e dispensam apresentações, mas consideramos que é merecida uma descrição mínima sobre Pólya.

Nascido em Budapeste, em 1887, ingressou na Universidade desta cidade em 1905, sendo orientado para cursar Matemática e Física, apesar de ter demonstrado interesse inicialmente pela Filosofia. Sua trajetória de estudos avançados e prática docente passa por Viena, Göttingen e Zurique. Duas bolsas da *Rockefeller Fellowship* o levaram à Inglaterra e aos EUA em 1924 e 1933, respectivamente.

Em 1940, forçado pela situação política, encaminhou-se novamente para os Estados Unidos, onde se estabeleceu até seu falecimento em 1985, atuando principalmente na Universidade de Stanford, como professor titular e, posteriormente, emérito, em diversas áreas da Matemática tais como: combinatória, probabilidade, análise complexa e equações diferenciais parciais (O'CONNOR; ROBERTSON, 2002).

Sua produção acadêmica não ficou restrita, porém, a aspectos da Matemática em suas teorias e aplicações; pouco tempo antes de sua ida definitiva para os EUA, escreveu um pequeno livro que acabou sendo publicado nos EUA em 1945 sob o título de *How to solve it*.

Em poucos anos, esta obra de Pólya, uma espécie de manual para a resolução de problemas, foi traduzido para mais de 17 línguas, superando um milhão

[4] É frequente encontrar a grafia ocidentalizada George Polya.

de cópias vendidas[5]. Um dos idiomas para os quais foi traduzido o livro de Pólya foi o húngaro e este trabalho coube justamente a Imre Lakatos[6].

Pólya relata que uma das razões pelas quais chegou a enfatizar o assunto das descobertas matemáticas e dos procedimentos a elas relacionados foi sua formação acadêmica inicial:

> Quando cheguei à matemática e aprendi algo sobre ela, pensei:[...] a prova parece ser conclusiva, mas como as pessoas podem encontrar esses resultados? A minha dificuldade em compreender a Matemática é: como isso foi descoberto? (PÓLYA apud ALBERS e ALEXANDERSON, 2008, p. 256)

Pólya afirma que duas foram as fontes que o levaram a se preocupar com a importância da descoberta: *The Science Of Mechanics - A Critical and Historical Account of its Development*, de Ernst Mach e *Regulae*, de Descartes. O primeiro deles pelo seu mote principal: “você não pode entender uma teoria se não souber como ela foi descoberta” e o segundo por ser, nas palavras de Pólya, uma obra sobre resolução de problemas que não é mencionada na história da Filosofia porque os historiadores que escreveram sobre o filósofo francês “não conheciam nada a respeito de resolução de problemas” (PÓLYA apud ALBERS e ALEXANDERSON, 2008, p. 255).

A seguir, reproduzimos uma passagem em que Pólya expõe a estrutura de seu método heurístico, dedicado à resolução de problemas, com ênfase na Matemática:

> - Compreenda o problema: Qual é a incógnita? Quais as condições iniciais e exigências de resolução? Essas condições são suficientes para determinar a incógnita? Faça diagramas. Separe as várias partes das condições.
> - Estabeleça um plano: Descubra as conexões entre os dados e a incógnita. Se a conexão imediata não for possível, pode ser necessário considerar problemas auxiliares. Esse problema já foi visto anteriormente? Ou um problema ligeiramente diferente? É conhecido um problema relacionado? É sabido um teorema útil para a resolução? Há um problema já resolvido que possua exata ou aproximadamente a mesma incógnita? É possível resolver um problema relacionado (análogo, mais geral ou mais específico)? É possível resolver parte do problema? Todos os dados e condições foram utilizados?
> - Execute o plano: Execute o plano estabelecido, passo a passo, com clareza e correção em cada etapa.

---

[5] No Brasil, foi publicado pela Editora Interciência sob o título *A arte de resolver problemas* em 1977, com reimpressões em 1986 e 1995, com tradução de Heitor Lisboa de Araújo (UFRJ).

[6] Em húngaro publicado como *A gondolkodás iskolája (Hogyan oldjunk meg feladatokat?*) em 1971.

> - Revise a solução: Examine a solução obtida. É possível checar o resultado? A solução pode ser desenvolvida de uma forma diferente? O resultado ou o método de resolução pode ser utilizado em outro problema? (PÓLYA, 1973, pp. xvi-xvii)

Outra peculiar influência de György Pólya sobre Lakatos foi a sugestão de usar o teorema de Euler-Descartes relacionado aos poliedros em seus estudos de doutoramento. O próprio Pólya já o havia utilizado como um exemplo em seu livro *Induction and analogy in Mathematics* (PÓLYA, 1954, v. I, pp. 35-43), tratando das possíveis intuições matemáticas que levaram à conjectura original.

Lakatos destaca em *Proofs and refutations* os elementos da heurística, aqui entendida como um conjunto de procedimentos mentais que reúnem, organizam e selecionam as informações para encontrar conjecturas e ideias plausíveis[7], construir demonstrações e validar os resultados obtidos.

Este entendimento acerca da heurística é claramente baseado em Pólya, que, explicando a heurística moderna (isto é, aquela que havia desenvolvido) diz:

> A heurística moderna dedica-se a compreender o processo de resolução de problemas, especialmente as operações mentais tipicamente úteis neste processo. Ela tem várias fontes de informação, nenhuma das quais deve ser negligenciada. Um estudo sério de heurística deve levar em conta tanto o aspecto lógico como o psicológico, não deve negligenciar o que autores mais antigos como Pappus, Descartes, Leibniz e Bolzano têm a dizer sobre o assunto, mas deve ainda menos negligenciar a experiência imparcial. Experiência na resolução de problemas e experiência em ver outras pessoas resolvendo problemas deve ser a base sobre a qual a heurística é construída. Neste estudo, não devemos negligenciar qualquer tipo de problema, e devemos encontrar características comuns na maneira de lidar com todos os tipos de problemas; Devemos visar a características gerais, independente do assunto do problema . (PÓLYA, 1973, pp. 129-130)

Larvor (1998) comenta que este entendimento de heurística se aproxima da concepção de uma *ars inveniendi* e o afasta da definição usual de um mero aparato psicológico para auxiliar a mente humana na compreensão de algo mais difícil.

---

[7] Pólya diz que há o raciocínio demonstrativo e o raciocínio plausível. O primeiro é o que dá sustento às provas matemáticas e é caracterizado por ser formal, rígido e definitivo. O raciocínio plausível é, por sua vez, fluido e incerto, mas é o que garante que, dentre um universo de suposições, se faça a escolha de buscar a prova de uma hipótese e não das demais. O raciocínio plausível é, portanto, o que gera as conjecturas que serão submetidas aos experimentos.

Popper já salientava a distinção entre o contexto de descoberta e o contexto de justificação, isolando a produção de conjecturas de seu desenvolvimento, considerando que a produção é um fenômeno a ser analisado pelos psicólogos e sociólogos e que interessa à Lógica e à Filosofia somente a segunda etapa.

Lakatos, rejeitando o estabelecimento de uma racionalidade estática como a única possibilidade, que negligencia a existência de outras formas de inquirição lógica, encontrou similaridades de seu pensamento com as ideias de seu conterrâneo:

> Estudando os métodos de resolução de problemas, percebemos outra face da Matemática. Sim, a Matemática tem duas faces: ela é a ciência rigorosa de Euclides, mas também é algo mais. A Matemática apresentada da maneira euclidiana parece ser uma ciência sistemática e dedutiva, mas a Matemática em construção se mostra como uma ciência experimental e indutiva. (PÓLYA, 1973, p. vii)

Pólya defendia que o procedimento estático da Matemática euclidiana, com seus axiomas e demonstrações seguras, não é capaz de explicar a “Matemática em construção”. As semelhanças da heurística de Pólya com a metodologia de Lakatos serão apontadas no decorrer deste texto, em especial na seção 3.2.

2.4 CONJECTURA – PROVA – CONTRAEXEMPLOS

Acompanhando a estrutura da publicação original de *Proofs and Refutations*, elencamos os tópicos que serão a seguir estudados, acompanhando parcialmente as divisões[8] colocadas no texto pelo próprio Lakatos:

Experimento mental (quasi-experimento).
Críticas à demonstração.
Estratégia de rendição.
Estratégia de impedimento de monstros (monster-barring).
Estratégia de impedimento de exceções (exception-barring).
Estratégia do ajuste de monstros (monster-adjustment).

[8] A maior parte dos itens deste rol de tópicos são exatamente as seções do artigo original. Algumas subseções, no entanto, foram relacionadas separadamente, para melhor acompanhamento das estratégias estudadas por Lakatos. Por esse motivo, separamos em doze partes, ao invés de nove, como visto em 2.2.2.

Método da incorporação de lemas.

Análise da prova. O problema do rigor.

Prova versus análise da prova.

O problema do conteúdo.

Formação de conceitos.

Verdade matemática e verdade lógica.

Para a identificação de uma estrutura geral do texto, reconhecemos que o ponto principal é a apresentação e defesa do método de provas e refutações como uma proposta de compreender a evolução do conhecimento e conteúdo matemáticos e isso se dá no subtítulo 7, sendo aperfeiçoado em 8.

O estudo de caso que dá base para a introdução do método é o Teorema de Euler, com a proposta de demonstração de Cauchy, que compõem a seção 1. Nas seções de 2 a 6, é construído por Lakatos um percurso conflituoso de surgimento de elementos que contrariam a conjectura ou sua prova e das tentativas de salvação de ambas. Este caminho do debate prepara o terreno para que o método seja apresentado como uma solução para o desenvolvimento conceitual.

O final da seção 8 e todas as restantes (de 9 a 12) tratam de avaliar as consequências do emprego do método de Lakatos levantando algumas importantes indagações no escopo geral da Filosofia da Matemática: qual é o impacto de um método que admite refutações contínuas nas questões acerca do rigor matemático? Como se relaciona tal método com a formação de conceitos e com a linguagem usada para comunicar informações matemáticas? A adoção de uma postura crítica a respeito da formulação de conjecturas e suas provas interfere nas concepções de verdade da lógica e da matemática?

2.4.1 EXPERIMENTO MENTAL (QUASI-EXPERIMENTO)

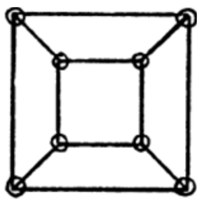
A conjectura que acabou recebendo o nome de Leonhard Euler a respeito dos poliedros foi formulada pelo matemático alemão pela primeira vez no ensaio *Elementa Doctrinae Solidorum,* de 1750, assim enunciado: “Em todos os corpos sólidos formados por planos, a combinação do número de ângulos sólidos e o número de faces excede em dois o número de arestas[9]."

Uma sugestão de prova é dada em um texto seguinte denominado *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita* (Demonstração de algumas das propriedades dos corpos sólidos delimitados por planos), de 1751. Os dois textos foram publicados em exemplares de *Novi Commentarii Academiae scientiarum Imperalis Petropolitanae*, periódico da Academia de ciências de São Petersburgo.

Apesar de Euler ter proposto uma demonstração[10], a sugestão apresentada pelo Professor em *Proofs and Refutations* se baseia em um texto de Augustin Cauchy, escrito em 1811 e publicado no *Journal de l'Ecole Polytechnique* (1813, vol. 9, pp. 68-74), sob o título de *Recherches sur les polyedres* (Pesquisas sobre os poliedros). O trecho a seguir é a transcrição[11] da obra de Lakatos que dá conta de apresentar este estudo de Cauchy:

"1ª etapa: Imagine o poliedro como sendo oco, com sua superfície confeccionada de uma borracha fina. Se cortarmos uma das faces, podemos esticar a superfície restante, planificando-a no quadro, sem a romper. As faces e arestas serão deformadas, as arestas podem se tornar curvilíneas, mas V, A e F não se alteram, de tal forma que, se e somente se, $V - A + F = 2$ para o poliedro original, $V - A + F = 1$ para esta rede planificada, lembrando que removemos uma das faces. (a Fig. 1 mostra a primeira etapa executada considerando um cubo)

Figura 1 – Rede planificada (cubo)



Fonte: LAKATOS, 1977, p. 8

---

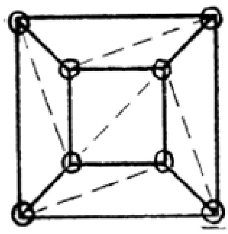
[9] *In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero angulorum solidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum.*

[10] A demonstração de Euler acabou por se mostrar falha, mesmo considerando o domínio restrito para o qual a havia proposto, os poliedros convexos (SANDIFER, 2004).

[11] Em função da importância e extensão do trecho citado, optamos por não apresentá-lo da forma usual, i.e., com recuo de parágrafo.

2ª etapa: agora triangulamos nosso mapa – ele realmente se parece com um mapa geográfico. Desenhamos diagonais (possivelmente curvilíneas) nos polígonos (possivelmente curvilíneos) que ainda não são triângulos (possivelmente curvilíneos). Ao desenhar cada diagonal, aumentamos ambos A e F em uma unidade, então o total $V - A + F$ não se alterará.

Figura 2 – Rede planificada e triangularizada



Fonte: LAKATOS, 1977, p. 8

3ª etapa: Da rede triangulada removemos os triângulos um a um. Para remover um triângulo, também removemos uma aresta – consequentemente uma face e uma aresta desaparecem (Fig. 3a) ou removemos duas arestas e um vértice – consequentemente uma face, duas arestas e um vértice desaparecem (Fig. 3b).

Figura 3 – Remoção de triângulos da rede

Fonte: LAKATOS, 1977, p. 8

Assim, se $V - A + F = 1$ antes de um triângulo ser removido, se mantém o mesmo após a remoção. Ao final do processo, obtemos um único triângulo, para o qual $V - A + F = 1$ se mostra verdadeiro. Assim provamos nossa conjectura." (LAKATOS, 1977, p. 8-9)

A afirmação otimista que encerra a citação é precoce ao garantir a "prova da conjectura", já que as críticas apresentadas pelos alunos (que serão detalhadas a seguir) levam o Professor de *Proofs and Refutations* a modificar o termo utilizado para classificar a sequência de procedimentos elaborada por Cauchy.

Como o nome "prova" traz consigo uma carga semântica muito forte associada à questão de confirmação da verdade da conjectura, a sugestão do Professor é dizer que a "prova" de Cauchy é um "*experimento mental* – ou '*quasi-experimento' – que sugere uma decomposição da conjectura original em subconjecturas ou lemas, incorporando-a*[12] *em um campo de conhecimento possivelmente um tanto distante*" (LAKATOS, 1977, p. 9, grifos no original).

Na explicação deste termo, há alguns aspectos a serem considerados: o termo empregado (*experimento mental* ou *quasi-experimento*) estabelece uma possível aproximação do domínio das ciências naturais em que se aplica o falibilismo popperiano e também traz elementos de exercícios intelectuais que antecedem a demonstração em si, enquanto a decomposição em subconjecturas remete a um procedimento que prioriza a análise.

Sobre a escolha do nome, Lakatos afirma que absorveu o termo quasi-experimento de um comentário feito pelo editor do periódico *Novi Commentarii academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae*, a respeito do trabalho de Leonhard Euler intitulado *Specimen de usu observationum in mathesi pura* (Exemplo de utilização da observação em matemática pura), publicado em 1761. Neste texto, Euler apresenta propriedades dos números que têm a forma $2aa + bb$, no entanto, ao invés de seguir uma estrutura convencional de definições-proposições-demonstrações, inicia apresentando uma série de observações que o levaram às conjecturas a respeito desses objetos.

A característica do método utilizado por Euler destacada pelo editor[13] foi a importância dada às observações como uma etapa anterior às demonstrações rígidas:

> Como devemos referir os números ao intelecto puro somente, dificilmente podemos compreender como observações e quasi-experimentos podem ser

---

[12] No texto original, o autor escreve "embedding", que, em Matemática, tem o significado particular da preservação da estrutura de um objeto matemático em outro (por exemplo, a manutenção das operações do conjunto dos números inteiros no conjunto dos números naturais). No caso particular, o quasi-experimento de Cauchy parte de um domínio original de objetos sólidos e se desenvolve em outra instância, a das malhas planas "possivelmente elásticas"; considerando que as operações realizadas neste último tem resultados que podem também ser aplicados no primeiro. (Sobre o significado de "embedding" na Matemática, há uma sucinta explicação em <http://mathworld.wolfram.com/Embedding.html>)

[13] Não consta da publicação informações sobre o corpo editorial, contudo é razoável que tenha sido um dos membros matemáticos da Academia, possivelmente Daniel Bernoulli ou Jakob Hermann (que teve como professor Jacob Bernoulli, tio de Daniel Bernoulli). (<http://www.encspb.ru>)

> úteis na investigação da natureza dos números. No entanto, de fato, como mostrarei aqui com razões muito boas, as propriedades dos números conhecidas atualmente têm sido descobertas principalmente pela observação. (NOVI COMMENTARI, 1761, p. 19)

O emprego de observações que antecedem a formulação de uma conjectura e de possíveis demonstrações apresentadas em uma forma dedutiva parece se assemelhar às estratégias de investigação próprias das ciências empíricas e parecem carecer de uma justificativa para ser inserido na Matemática, que deve se referir “ao intelecto puro somente”.

A etapa que antecede a formulação da conjectura e é caracterizada muitas vezes por exercícios de imaginação e por uma atividade “empírica” (no sentido de “tentativas e erros”, não guiada por uma concepção demonstrativa prévia) é um elemento importante da teoria de Pólya, adotado por Lakatos e incorporado neste conceito de quasi-experimento, mesmo que no caso particular da “prova” de Cauchy este aspecto não seja evidente.

Sobre o segundo aspecto do experimento mental, isto é, da decomposição em subconjecturas, Lakatos se refere aos matemáticos pré-euclidianos que valorizavam o papel da análise sobre a síntese na demonstração de teoremas e na resolução de problemas, citando Proclo (século V), que afirmava ser necessário conhecer de antemão aquilo que se pretendia demonstrar para depois identificar as propriedades desses elementos e suas regularidades subdividindo o problema em etapas.

A respeito da valorização da análise sobre a síntese e da abordagem da Matemática em seu aspecto quasi-empírico, Lakatos sofreu a influência de seu antigo professor Árpad Szabó (1913-2001). De acordo com Máté (2006), a amizade entre os dois se estabeleceu ainda durante o período em que Lakatos cumpria suas obrigações como aluno na Universidade de Debrecen e se estendeu até sua morte.

Esse procedimento de subdivisão e solução de problemas auxiliares relacionados também pode ser visto nas regras de Descartes que, como já mencionado, influenciaram Pólya (e, consequentemente, Lakatos) em seus estudos:

> Regra VI - Para distinguir as coisas mais simples das mais complexas e prosseguir ordenadamente na investigação, é necessário, em cada série de coisas em que diretamente deduzimos algumas verdades umas das outras, notar o que é mais simples e como todo o resto dele está mais ou menos ou igualmente afastado. [...]

> Regra VII - Para completar a ciência, é preciso analisar, uma por uma, todas as coisas que se relacionam com o nosso objetivo, por um movimento contínuo e jamais interrompido do pensamento, abarcando-as numa enumeração suficiente e metódica.[...]
> Regra XIII – Se compreendermos perfeitamente uma questão, devemos abstraí-la de todo o conceito supérfluo, reduzi-la à maior simplicidade e dividi-la em partes tão pequenas quanto possível, enumerando-as. (DESCARTES, 1985, pp. 33, 39 e 83)

Lakatos identifica, no experimento de Cauchy, a divisão do enunciado original (em todo poliedro, $V - A + F = 2$) em três lemas:

1. Retirada de uma face e planificação, obtendo-se $V - A + F = 1$.
2. Triangulação da rede, com a manutenção de $V - A + F = 1$.
3. Retirada sequencial de triângulos, até se chegar a um único triângulo, em que a relação nitidamente se verifica.

Cada lema pode ser individualmente encarado como um novo problema, um novo experimento mental, que é investigado acerca de sua validade e possibilidade de generalização. Assim como nas recomendações de Descartes e Pólya, os lemas devem ser minuciosamente estudados para que deles se obtenha toda a informação necessária para a composição da prova.

Nesta tarefa de esclarecer e verificar os lemas, surgem as primeiras questões que geram o debate sobre a demonstração de Cauchy na sala de aula utópica de Lakatos, como apresentamos na próxima seção.

2.4.2 CRÍTICAS À DEMONSTRAÇÃO

Os personagens Alfa, Beta e Gama são os responsáveis por apresentar as dúvidas a respeito de cada um dos lemas do experimento mental de Cauchy, assim enunciadas:

(1) Qualquer poliedro pode ser planificado como sugerido na 1ª etapa?
(2) Na triangulação sugerida na 2ª etapa, sempre haverá o acréscimo de uma face a cada nova aresta adicionada?
(3) Há somente duas alternativas na 3ª etapa para se retirar os triângulos da malha produzida (eliminação de uma face e uma aresta ou de duas arestas e um vértice)?

Ainda sob a sombra das dúvidas (1) e (2), o aluno Gama sugere uma falha na terceira etapa, que leva o Professor a reformular o lema atacado, enunciando que a ordem de retirada dos triângulos deve ser de tal forma que a relação $V - A + F = 1$ não seja alterada.

De uma informação aparentemente segura, isto é, que havia somente duas maneiras de remover triângulos da malha, ambas com a manutenção da relação original $V - A + F = 1$, a dúvida levantada sobre a possibilidade de remover triângulos de tal forma que essa relação seja mantida coloca em cheque o procedimento e muda o foco do problema.

Enquanto a formulação original do terceiro lema, no experimento mental de Cauchy, sequer mencionava algum detalhe sobre a ordem de retirada dos triângulos, a questão apresentada por Gama é alimentada por contraexemplos que mostram que é possível retirar triângulos que alteram o valor numérico de $V - A + F$. Um dos contraexemplos é o caso de se retirar um triângulo do interior da malha que faz com que apenas a quantidade de faces seja reduzida de uma unidade enquanto as quantidades de vértices e arestas permanecem inalteradas.

Como a pergunta "há somente duas maneira de se retirar os triângulos da malha planificada?" recebe uma resposta negativa, para salvar o experimento a dúvida passa a ser: "é <u>sempre</u> possível determinar uma forma de se retirar os triângulos de tal forma que a relação $V - A + F$ não se altere?"

Com as informações disponíveis no estágio em que o debate se encontrava, não há nenhuma garantia de que tal ordem é sempre possível de ser estabelecida, mas o Professor insiste que as "conjecturas sofisticadas, amadurecidas pelas críticas <u>podem</u> alcançar a verdade" (LAKATOS, 1977, p. 12 – grifo nosso).

Lakatos é devedor de uma herança popperiana e mostra consonância com a ideia de apreciação do progresso da ciência a partir dos testes a que são submetidas as teorias. Trazendo para o âmbito da matemática, adota o termo quasi-experimento em analogia aos procedimentos das ciências empíricas, como afirma Glas:

> O pivô em que o programa de Lakatos se movimentou foi a interpretação de provas informais como experimentos racionais para a avaliação do conhecimento matemático. As normas de avaliação não provêm do estudo de fundações e sistemas formais, mas da lógica das provas e refutações, isto é, de testes e melhorias dos quasi-experimentos. A matemática é parecida com a ciência, não porque seja de alguma forma baseada em experiências sensórias, mas porque também progride através de testes e tentativas

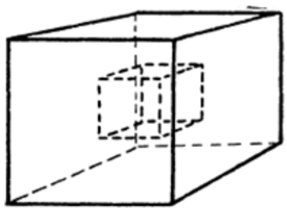
> falíveis, e por esse motivo, pode ser chamado de ciência quasi-experimental. (GLAS, 2014, p. 740)

Assim, apesar da semelhança, há uma mudança no falibilismo de Lakatos, já que um teste que refuta uma das etapas ou mesmo a totalidade do quasi-experimento não leva a um mero descarte para a substituição por outra teoria rival, mas indica a necessidade de uma reflexão sobre a necessidade de aperfeiçoamentos, sem que isso se caracterize como a defesa irracional da teoria exposta (atitude criticada por ambos e comum aos adeptos de pseudociências).

2.4.3 ESTRATÉGIA DA RENDIÇÃO

No decorrer de P&R, o método da rendição (ou da desistência) é o mais simples e sucinto e surge na fala do pupilo Gama, após a apresentação, por parte do aluno Alfa, do contraexemplo do “par de cubos encaixados” ou “cubo oco”, denominado Contraexemplo 1 pelo Professor.

Figura 4 – Contraexemplo1: o par de cubos encaixados



Fonte: LAKATOS, 1977, p. 13

Esse caso é atribuído a Simon Lhuilier pelo fundador e editor dos *Annales de mathématiques pures et appliquées*, Joseph Diaz Gergonne (Annales, tomo 3, 1812-13, p. 184), e contraria o teorema, pois nesse caso a relação $V - A + F$ é igual a 4 e não a 2, já que, para cada cubo do par, $V - A + F = 2$.

A reação de Gama é radical e rejeita a insistência no teorema proposto.

> Um único contraexemplo refuta uma conjectura tão efetivamente quanto dez. A conjectura e sua prova falharam completamente. Mãos ao alto! Você deve

> se render. Jogue fora a conjectura falsa, esqueça-a e tente uma abordagem radicalmente nova. (LAKATOS, 1977, p. 13)[14]

O Professor sugere uma alternativa mais amena que a desistência de Gama: o contraexemplo afeta a conjectura, mas não sua prova.

> Se, neste momento, você concorda com minha proposta anterior de usar a palavra "prova" para um "experimento mental" que leva à decomposição da conjectura original em subconjecturas, ao invés de usá-la no sentido de "garantia infalível de verdade", você não precisa chegar a esta conclusão. [...] Você está interessado apenas em provas que 'provam' aquilo que foram designadas para provar. Eu estou interessado em provas mesmo que elas não cumpram esta tarefa pretendida. Colombo não chegou à Índia, mas descobriu algo bem interessante. (LAKATOS, 1977, p. 14)

Lakatos apresenta a questão: "o que uma prova matemática prova?", que é exatamente o título de um artigo de sua autoria, escrito entre 1959 e 1961, e aponta para o necessário ajuste de vocabulário dos interlocutores: a palavra "prova" precisa ter seu conteúdo semântico esclarecido, por ser um termo bastante carregado de impregnações teóricas, variando sua interpretação dependendo das concepções de quem a emprega; além disso, deve ser definida a finalidade da atividade de "provar", isto é, seu papel em uma epistemologia.

Nesse artigo, o autor destaca que é comum o público leigo achar que há unanimidade a respeito do que é uma prova matemática para os matemáticos, mas que isso está bem longe da verdade.

Dependendo do significado escolhido para "prova", seriam admissíveis tanto o método da rendição de Gama, que decide descartar o que fora apresentado e partir para novas tentativas de demonstração, como a estratégia de impedimento de monstros (*monster-barring*) indicada a seguir.

2.4.4 ESTRATÉGIA DO IMPEDIMENTO DE MONSTROS

Esta estratégia se caracteriza pela rejeição dos contraexemplos que afrontam a conjectura e sua demonstração. Seu defensor, em P&R, é o aluno Delta, que propõe elevar ao status de teorema o enunciado que o professor ainda considerava uma

[14] As citações textuais de Proofs and Refutations estão indicadas de acordo com a publicação de 1977, ao invés da publicação original de 1963-4, com o objetivo de facilitar sua localização pela referência das páginas.

conjectura. Lakatos ressalta que vários matemáticos do século XIX fizeram comentários que se assemelham ao do aluno Delta, citando August Leopold Crelle (1826), Ludwig Matthiessen (1863) e Ernest de Jonquières (1890).

Na ocorrência de contraexemplos que poderiam agredir o teorema, a estratégia adotada pelos adeptos da estratégia de *monster-barring* é desqualificar as anomalias, classificando-as como monstros, aberrações. No caso específico do estudo de Lakatos, essa rejeição dos contraexemplos exige a elaboração de uma definição do conceito “poliedro” (termo que, até o momento, estava sendo empregado sem nenhuma formulação mais detalhada).

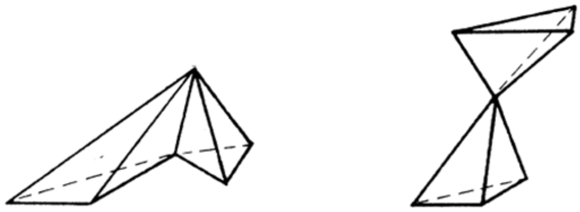
Lakatos não considera a necessidade de revisão dos conceitos como um caso de convencionalismo, mas como uma instância racional importante no processo de aperfeiçoamento da conjectura. A estratégia de impedimento de monstros, no entanto, ao redefinir os conceitos, rejeita as anomalias sem aproveitar a análise das instâncias do teorema que são por elas afetados; esta sofisticação será detalhada no método chamado pelo autor de “incorporação de lemas”.

A primeira definição apresentada por Delta para afirmar que o objeto do Contraexemplo 1 não é um poliedro é a seguinte: “poliedro é uma superfície constituída de um sistema de polígonos”. O objetivo desta formulação é salvar tanto a conjectura como a prova ao mesmo tempo em que descarta a anomalia.

Novos contraexemplos (2a e 2b) são colocados pelo aluno Alfa, e esses, apesar de respeitarem a definição dada por Delta, ainda contrariam a conjectura, pois, para tais objetos, denominados tetraedros gêmeos, que compartilham um vértice ou uma aresta, $V - A + F = 3$.

Segundo Lakatos, estes contraexemplos são devidos a Johann Friedrich Christian Hessel, no artigo *Nachtrag zu dem Euler'schen Lehrsatze von Polyeder* (Suplemento ao teorema de poliedros de Euler), publicado no volume 8 do *Journal für die reine und angewandt Mathematik*, em 1832.

Figura 5 – Contraexemplos 2a e 2b: os tetraedros gêmeos



Fonte:LAKATOS, 1977, p.15

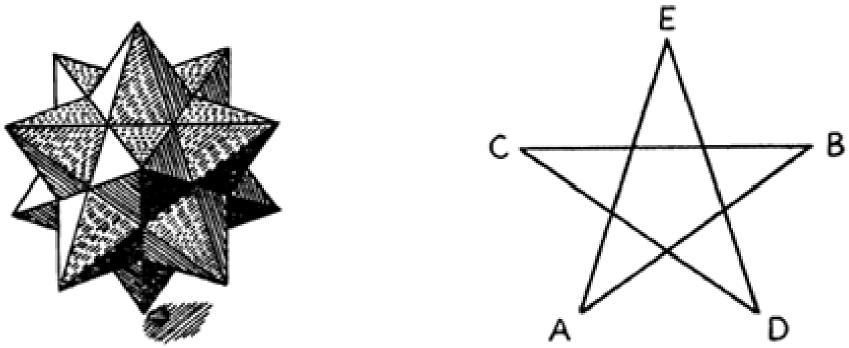
Novamente, a saída de Delta está na alteração da definição do termo poliedro que agora é reescrito da seguinte maneira: "poliedro é um sistema de polígonos disposto de tal forma que (i) exatamente dois polígonos se interceptam em cada aresta e (ii) é possível obter uma trajetória de um ponto interior de um polígono a outro ponto, interior de outro polígono, sem que se passe por um vértice".

Esta definição, dada por August Ferdinand Möbius no artigo *Über die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders* (Sobre a determinação do volume de um poliedro), de 1865 buscava justamente excluir os tetraedros gêmeos e objetos similares da distinta família dos objetos que respeitavam a conjectura de Euler.

A exigência (i) da definição impede que sejam considerados genuínios poliedros os casos como o contraexemplo 2a, em que dois tetraedros foram unidos por uma aresta em comum (aresta esta que é compartilhada por quatro polígonos, dois de cada poliedro). A cláusula (ii) barra a aceitação de casos como o contraexemplo 2b, pois, considerado um percurso de um ponto interior de um dos tetraedros a um ponto interior de seu "gêmeo", obrigatoriamente este caminho passará pelo vértice por eles compartilhado.

Novo contraexemplo, agora proposto pelo aluno Gama é um poliedro estrelado, considerando cada face como um pentágono estrelado. Este "monstro" é apresentado por Kepler em 1619.

Figura 6 – Contraexemplo 3: o ouriço



Fonte: LAKATOS, 1977, p. 17.

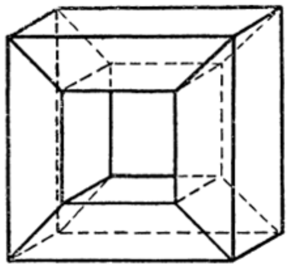
No caso do ouriço, há doze faces pentagonais estreladas (observando a figura da esquerda, com as faces hachuradas, observam-se seis diferentes padrões de preenchimento e, por simetria, há outras seis faces na parte posterior, não representada em virtude da perspectiva), doze vértices (os ápices em que se unem cinco faces distintas; na figura à esquerda encontram-se onze representados, mas há um vértice simétrico ao que se visualiza no centro, também na parte posterior) e trinta arestas (cada face tem cinco arestas, porém cada aresta é compartilhada por duas faces) e, nesse caso, $V - A + F = -6$.

A estratégia que visa excluir o "ouriço" do domínio de validade do Teorema de Euler passa pela elaboração de uma definição para o conceito de polígono (outro termo que até este momento do debate havia sido empregado sem explicação de seu significado) com a seguinte afirmação: "polígono é um sistema de lados dispostos de tal forma que: (i) exatamente dois lados se encontram em cada vértice e (ii) os lados não têm pontos comuns exceto os vértices."

Esta definição elimina a possibilidade de que o pentágono estrelado $ABCDE$ da figura 6 (à direita) seja considerado um *polígono*, já que contraria a parte (ii) da definição, pois, por exemplo, o segmento AB tem os pontos A e B comuns aos segmentos AE e BC, respectivamente, além dos pontos comuns aos segmentos CD e DE. Não sendo sequer admissível como pertencente ao conjuntos dos polígonos,

O próximo contraexemplo é a "moldura", que atende as definições apresentadas (mesmo após as várias modificações), porém contraria a conjectura, pois, nesse caso, $V - A + F = 0$ (há 16 vértices, 32 arestas e 16 faces), conforme a figura seguinte.

Figura 7 – Contraexemplo 4: a moldura



Fonte: LAKATOS, 1977, p. 19

O aluno Delta reage à suposição de que esse seria um poliedro não-euleriano dizendo que "abomina" os supostos poliedros para os quais não seja válido o "elegante teorema de Euler" e alega que os propositores de contraexemplos pretendem instaurar o caos no âmbito da Matemática, onde deve reinar a harmonia.

A colocação de Delta parafraseia uma exclamação de Charles Hermite que, em outro contexto – o estudo de funções de variável complexa - diz: "Eu me distancio com um calafrio de horror desta praga lamentável de funções que não têm derivadas!" (HERMITE, 1893 apud LAKATOS, 1977, p. 19)

A rejeição da moldura se dá pela apresentação de uma propriedade "implícita" dos poliedros, a saber: "no caso de poliedros genuínos, por qualquer ponto arbitrário no espaço, há pelo menos um plano que secciona o poliedro dado, obtendo como interseção um único polígono". Esta propriedade não é verificada na "moldura", pois, tomado um ponto no espaço interior delimitado pelas bordas, as interseções serão sempre um par de polígonos.

O confronto de apresentação de contraexemplos com a interposição de redefinições *ad hoc* dos termos (poliedro, polígono, aresta etc.) é, de acordo com Lakatos, impossível de resultar em algum consenso e isso se deve ao papel que cada lado da disputa assegura aos "monstros".

Por exemplo, Arnaud Denjoy, na aula inaugural da cátedra de Teoria das Funções na Universidade de Utrecht, menciona uma separação dos estudiosos em uma primeira escola que era avessa ao estudo da Teoria dos Conjuntos[15] e propunha que a Matemática se ocupasse somente de elementos harmoniosos, em oposição a

[15] Ramo da Matemática iniciado no final do século XIX, após os estudos principalmente de Richard Dedekind e Georg Cantor.

uma escola nova que seria capaz de obter melhor compreensão dos objetos por estudá-los em suas formas gerais. Ele diz:

> A segunda escola, observado uma vez que a melhor entre as funções tem as suas falhas, seus defeitos (dizemos suas singularidades), afirma que, para conhecer o seu verdadeiro caráter, revelar mais rápida e surpreendentemente a realidade de sua natureza, devem ser estudadas não no curso regular de sua existência, mas, por assim dizer, em tempo de crise, febre, paixão. (DENJOY, 1919, p. 20 apud LAKATOS, 1977, p. 23)

Lakatos, usando a fala do Professor de P&R, sintetiza o método de rejeição de monstros e aponta que, apesar de ser muitas vezes executado de maneira muito hábil por seus adeptos, é falho por estar alicerçado em uma base dogmatista:

> Usando este método pode-se eliminar qualquer contraexemplo à conjectura original por uma redefinição *ad hoc* de poliedro ou de seus termos formadores. Deveríamos tratar os contraexemplos de forma mais respeitosa e não exorcizá-los tacitamente ao denominá-los monstros. O erro principal de Delta é talvez o seu viés dogmático na interpretação de uma prova matemática: ele considera que uma prova necessariamente prova aquilo que foi estabelecido que provasse. Minha interpretação de prova permitirá que uma falsa conjectura seja 'provada', i. e., decomposta em subconjecturas. Se a conjectura for falsa, certamente espero que ao menos uma das subconjecturas seja falsa. Mas a decomposição pode ainda ser interessante! Não estou incomodado ao encontrar um contraexemplo a uma conjectura 'provada'; estou na verdade querendo definir a 'prova' de uma falsa conjectura! (LAKATOS, 1977, p. 23)

Apesar de julgar importante o processo dialético da Matemática que, a partir do diálogo, vai aperfeiçoando a concepção de um conceito, o exercício dos ajustes de definições como uma recusa ao enfrentamento dos monstros não é bem vista por Lakatos. É preferível, em sua opinião, analisar os contraexemplos para perceber quais subconjecturas são por eles afetadas, tendo como alvo maior o aperfeiçoamento da conjectura original.

Como uma alternativa mais amena, que não exclui violentamente os contraexemplos, é apresentada a estratégia de impedimento de exceções (*exceptionbarring*).

2.4.5 Estratégia de impedimento de exceções: Exclusão por partes

O aluno Beta, cuja participação havia sido singela nos debates iniciais, é o responsável pela proposição de uma nova estratégia para a redenção da conjectura, após um aperfeiçoamento do enunciado que pudesse caracterizar nitidamente o domínio restrito em que sua validade se mantém.

Outra consideração é uma revisão de terminologia, rejeitando a classificação dos objetos até então chamados de “monstros”, “casos patológicos” ou “contraexemplos”. Em sua opinião, eles devem ser considerados meramente como exemplos passíveis de uma investigação particular, identificados pela denominação de “exceções”.

Aproveitando a proposta de Beta, o pupilo Sigma enuncia uma taxonomia de proposições matemáticas:

- Aquelas que são sempre verdadeiras e para as quais não há restrição ou exceção (por exemplo, a soma dos ângulos de todos os triângulos planos é igual a dois ângulos retos).

- Aquelas que se baseiam em um princípio falso e que não podem ser admitidas de forma alguma.

- Aquelas que, ainda que articuladas a princípios verdadeiros, admitem restrições ou exceções em alguns casos.

Esta classificação é reprodução literal de um trecho do artigo do professor de matemática Joseph-Balthazard Bérard para os *Annales de mathématiques pures et appliquées* (1819, apud LAKATOS, 1977) a respeito das condições para a determinação da quantidade de raízes imaginárias para uma equação algébrica de grau qualquer. Bérard afirma que não se pode confundir um teorema falso com um teorema sujeito a restrições, citando D’Alembert: “as exceções confirmam a regra ao invés de a destruírem” e Lagrange: “este princípio é geralmente verdadeiro; mas notei uma vez que foi sujeito a exceções que possam colocar a demonstração prévia em falha.”

Beta, no entanto, modifica a classificação de Sigma, dizendo que os três tipos de proposições matemáticas são:

- verdadeiras;
- irremediavelmente falsas;
- remediavelmente falsas.

O ‘remédio’ que pode tornar as proposições deste último tipo em verdadeiras é justamente o acréscimo de uma cláusula restritiva que defina as exceções. Assim, “a fórmula é verdadeira se certas condições são cumpridas. Determinando tais condições e definindo precisamente os significados dos termos em uso, toda incerteza desaparece.” (CAUCHY, 1821)

Colton e Pease (2005) apresentam a seguinte explicação sobre o método de exclusão por partes e a sensível diferença em relação ao impedimento de monstros:

> A exclusão por partes se dá pela generalização de um contraexemplo em uma classe de contraexemplos e, em seguida, pela exclusão desta classe da conjectura que havia sido falseada. [...] Formalmente, suponha que se tenha a conjectura $\forall\, x\ (A(x)\ \Rightarrow\ B(x))$, e um conjunto de contraexemplos N tal que $\forall\, x\ \in\ N, A(x)\ \wedge\ \neg B(x)$, e um conjunto de exemplos positivos P de modo que $\forall\, x\ \in\ P, A(x)\ \wedge\ B(x)$. Para executar a exclusão por partes, encontre uma característica C tal que $\forall\, x\ \in\ N,\ C(x)$, e $\forall\, x\ \in\ P, \neg C(x)$, e então modifique a conjectura para: $\forall\, x\ (\neg C(x)\ \wedge\ A(x))\ \Rightarrow\ B(x)$. Quando há um único contraexemplo e não se identifica expressamente o conceito que permita a generalização em uma classe, a exclusão por partes se dá como um impedimento de contraexemplo, no qual o contraexemplo é proibido explicitamente em uma conjectura modificada, i. e., dado um único contraexemplo $x_1 \in N$, modifica-se a conjectura para: $\forall\, x\ \neq x_1\ (A(x)\ \Rightarrow\ B(x))$. (COLTON; PEASE, 2005, p. 89)

Para seus defensores, o impedimento de exceções é uma evolução do impedimento de monstros e serve para identificar o que deve ser retirado do domínio de validade da conjectura, para então, excluídos os elementos que a refutariam, definir uma suposta formulação ideal da conjectura. Para o caso em estudo, o enunciado passaria a ser: “Para todo poliedro que não tem cavidades (como o par de cubos encaixados) e túneis (como a moldura), $V - A + F = 2$”, ou, de forma mais completa, “para todo poliedro que não tem cavidades, túneis ou ‘estruturas múltiplas’, $V - A + F = 2$.”

Lakatos, novamente usando a voz do Professor, demonstra certa simpatia por este método em relação à desistência súbita ou ao impedimento de monstros, mas não concorda com a presunção de tornar a conjectura perfeita. Para ele, cada aperfeiçoamento do enunciado é uma eliminação *ad hoc* de um contraexemplo que já tenha surgido, mas não há como se conhecer todos os possíveis contraexemplos e, portanto, não há como definir o domínio de validade perfeito.

Após as críticas, o aluno Beta sugere uma estratégia mais modesta, porém mais segura, de determinar o conjunto de poliedros para os quais a conjectura se verifica. Sua proposta é apoiada em uma ideia de Newton:

> Se nenhuma exceção ocorre para um fenômeno, a conclusão pode ser enunciada generalizadamente. Mas, se a qualquer tempo posterior alguma exceção ocorrer deve passar a ser enunciada associada à exceção que ocorreu." (NEWTON, 1717 apud LAKATOS, 1977, p. 27)

Considerando, portanto, que os contraexemplos surgiram quando se começaram a inserir os poliedros não convexos no estudo, Beta sugere um novo enunciado para a conjectura que, em sua opinião, agora atinge o grau de teorema: "Todo poliedro convexo é euleriano".

O Professor comenta que o aperfeiçoamento da conjectura proposta por Beta aparentemente é uma ação de cautela, mas ainda assim não garante perfeitamente que não haverá nenhum contraexemplo, mesmo nesse novo domínio de validade, além de ter deixado de fora vários poliedros que são eulerianos. Outro problema é o esquecimento da prova: ao admitir que o domínio de restrição passa a garantir a validade da conjectura, aparentemente a prova não é mais necessária.

Na concepção de Lakatos não há garantia de que jamais ocorram contraexemplos em qualquer estágio de evolução da conjectura. Mesmo que existam períodos razoavelmente longos em que a teoria goza de uma aparente estabilidade, as refutações de lemas ou de toda a prova podem surgir a qualquer momento. Além disso, os reajustes *ad hoc*, com a intenção de salvar a conjectura não avaliam os aspectos da prova que foram contrariados, mas tão somente restringem o conjunto para os quais o enunciado permanece verdadeiro.

Excluir a prova da investigação filosófica da Matemática é uma ação inadmissível para Lakatos, que a considera como objeto importantíssimo a ser submetido à crítica pelas refutações. Lakatos insiste na pergunta: "o que uma prova matemática prova, afinal?" salientando que o interesse principal é saber o que uma prova matemática faz, e não o que ela é.

Com uma dose de sarcasmo, critica a postura de alguns matemáticos dizendo que os assim chamados matemáticos aplicados acreditam que "provas matemáticas completas" estão na Matemática pura enquanto os matemáticos puros acham que estas estão na Lógica.

Para ilustrar, cita um eminente matemático puro do século XX, Godfrey Hardy (1877-1947) que diz: "rigorosamente falando, não há provas matemáticas. Podemos, em última análise, questionar... Provas são o que Littlewood e eu chamamos de tolices, enfeites retóricos para estimular a imaginação de alunos." (HARDY, 1928)

Em uma coletânea de artigos que Hardy publicou, em 1916, fruto de trabalhos realizados em parceria com seu mencionado colega John Littlewood (1885-1977) sob o título *Contributions to the theory of the Riemann zeta function and the theory of the distribution of primes*, há diversas frases em que esses importantes matemáticos apontam sem pudor sua incapacidade de estabelecer as provas desejadas:

> Não parece ser possível, no presente estágio de nosso conhecimento das propriedades de ξ(s) oferecer uma prova satisfatória da fórmula. [...]
> Somos incapazes de apresentar uma prova satisfatória desta fórmula, mas ela nos parece ser digna de atenção.[...]
> Trataremos de algumas fórmulas que nos foram sugeridas pelos trabalhos do Sr. S. Ramanujan. Não temos nenhuma prova satisfatória da veracidade das fórmulas, apesar de serem altamente prováveis; mas são tão curiosas que parece valer a pena mencioná-las. (HARDY; LITTLEWOOD, 1916, pp. 122,123 e 139)

Essas confissões da incapacidade de conseguir elaborar uma prova “satisfatória” e “rigorosa”, nas palavras de matemáticos de alto nível, sustentam propostas como a de Lakatos, que pretende admitir como provas outros procedimentos, mesmo que não cumpram as regras de um sistema axiomático e formal. Lakatos propôs uma classificação das provas em dois tipos: formais e informais.

As provas formais seriam assim definidas: uma prova é uma sequência finita de fórmulas de algum sistema dado, em que cada fórmula da sequência ou é um axioma do sistema ou uma fórmula derivada por uma regra do sistema a partir das fórmulas precedentes. (LAKATOS, 1997c, p. 62)

O que Lakatos chama de prova informal atende as características dos “experimentos mentais” comentados anteriormente, dos quais o experimento de Cauchy para o teorema de Euler-Descartes para poliedros é uma amostra. Lakatos ainda oferece outras duas maneiras de descrever uma prova como “um processo de testes que aplicamos às sugestões de nossa intuição” (WILDER, 1944 apud LAKATOS, 1977, p. 29) ou como uma estratégia que “estabelece conexões entre fatos matemáticos e isto nos ajuda a mantê-los na memória”. (PÓLYA, 1945 apud LAKATOS, 1977, p. 29)

Essa questão recorrente a respeito do que vem a ser uma prova matemática se estende à avaliação de como a Matemática era tratada, especialmente no final do século XIX e início do XX. No artigo *A renaissance of empiricism in the recent Philosophy of Mathematics*, publicado em 1967, Lakatos apresenta sua concepção do que chama de teorias euclidianas e teorias quasi-empíricas. Segundo sua análise, as teorias euclidianas têm as seguintes características:

- tomam como modelo a Geometria euclidiana: um sistema dedutivo com inserções de verdades no topo (axiomas finitos) e que atravessa o sistema todo por canais seguros de transmissão de verdade;
- possuem proposições que podem ser chamadas de verdadeiras;
- afirmam que os axiomas provam o restante do sistema;
- utilizam a Lógica para organizar a prova; e
- se desenvolvem a partir de um estágio ingênuo (pré-científico), passam por um período fundacional, que estabelece a estrutura dedutiva do núcleo e têm como produto as provas.

As abordagens da Matemática, tanto na escola logicista como na formalista, seguem o modelo euclidiano, e não admitem um procedimento heurístico que aceita a reinterpretação de um contraexemplo que já tenha sido utilizado para refutar uma conjectura.

No entanto, a proposta de Lakatos considera a possibilidade de analisar a “lógica da descoberta” que Popper rejeitava como mero psicologismo, mas que Pólya reconhecia como parte importante do crescimento da Matemática. Na seção 3.2.1 tratamos deste assunto com mais detalhes.

Esta lógica tem papel relevante a desempenhar na própria lógica da justificação, ou seja, é essencial para o próprio significado das proposições matemáticas e para sua demonstração.

A heurística tem implicações em cada etapa – da conjectura ingênua até a prova aperfeiçoada – e o processo pode ser retomado várias vezes com o objetivo de aprimorar ainda mais o teorema. O método de Lakatos não é, portanto, uma mera escada que pode ser escalada e depois atirada fora.

2.4.6 Estratégia de ajuste de monstros

O aluno Ro apresenta outra possibilidade de lidar com os contraexemplos, optando por uma forma diferente de interpretá-los ao invés de exigir sua exclusão; seu método pode ser visto em consonância com uma frase de Matthiessen: “em um exame mais próximo, as exceções parecem ser apenas aparentes e o Teorema de Euler mantém sua validade mesmo para as alegadas exceções." (MATTHIESSEN, 1863, apud LAKATOS, 1977, p. 31)

Um exemplo característico desse método é reconhecer o "ouriço" (contraexemplo 3) não como um dodecaedro estrelado, mas como um poliedro de sessenta faces triangulares, noventa arestas e trinta e dois vértices, portanto um poliedro com característica de Euler igual a 2. Esta forma de descrever o "ouriço" é devida a Jonquières em sua obra *Note sur le théorème d'Euler dans la théorie des polyèdres* (Nota sobre o teorema de Euler na teoria dos poliedros), de 1890.

Lakatos menciona uma mudança de atitude do matemático Louis Poinsot, que transitou de um falseabilismo para um dogmatismo:

> Poinsot certamente sofreu uma lavagem cerebral em algum momento entre 1809 e 1858. Foi Poinsot que redescobriu os poliedros estrelados inicialmente e estabeleceu que alguns deles, como o nosso pequeno dodecaedro estrelado, não atendem a fórmula de Euler [1809]. Depois este mesmo Poinsot afirmou categoricamente em seu [1858] que a fórmula de Euler "é verdadeira não somente para qualquer poliedro convexo como para todo poliedro qualquer que fosse, incluindo os poliedros estrelados". (LAKATOS, 1977, p. 31)

A estratégia do ajuste de monstros é dogmática, portanto, porque não busca aprimorar a prova – e o resultado matemático – a partir das dificuldades encontradas. Com efeito, para ser executada, a estratégia de ajuste de monstros, baseada em um procedimento de reinterpretação, precisa ser sustentada por uma teoria a respeito do erro, pois admite que as verdades são evidentes e os que não a enxergam cometem erros que devem ser corrigidos.

Inspirado por Popper, Lakatos afirma que "nada é mais característico de uma epistemologia dogmatista que sua teoria do erro. […] De acordo com suas teorias particulares, cada uma oferece sua terapia para purgar as mentes do erro." (LAKATOS, 1977, p. 31)

Ainda acompanhando o vocabulário popperiano, a estratégia de ajuste de monstros parece ser um emprego ingênuo da noção de corroboração e de sua apreciação.

> [...] está longe de ser "útil" identificar o conceito de corroboração ao de verdade. Assim, se definíssemos "verdadeiro" como "bem sucedido" ou "confirmado", teríamos apenas introduzido um novo conceito "absoluto" e "intemporal" para desempenhar o papel de "verdade". (POPPER, 2008, p. 303)

O possível progresso que os contraexemplos poderiam trazer à conjectura inicial é, dessa forma, suspenso e o que serviria como o início de uma escrita mais sofisticada do teorema e de sua prova torna-se um exercício de retórica para justificar a pertinência dos elementos em certo domínio de validade.

2.4.7 APERFEIÇOAMENTO DA CONJECTURA PELO MÉTODO DA INCORPORAÇÃO DE LEMA.

Após a apresentação dos diversos contraexemplos e de tentativas de lidar com o choque por eles causado na conjectura inicial, Lakatos, falando através do Professor, apresenta o método de incorporação de lema que, partindo de uma análise das anomalias (os "monstros"), pretende aprimorar a conjectura ingênua.

Recordando o contraexemplo da moldura, admite que somente os poliedros simples podem ser objetos da primeira etapa do experimento mental, isto é, a etapa em que uma das faces é retirada e o sólido é planificado. O aluno Alfa complementa com a intuição de que poderiam ser chamados de "simples" aqueles poliedros que, se fossem feitos de um material flexível e "inflados", passariam a ser uma esfera. Isso não ocorreria com o contraexemplo da moldura, que seria "inflada" como um toro[16].

Considerada esta restrição, aquele que era um contraexemplo global da conjectura não se torna um fator para sua refutação plena, mas conduz a revisões da definição e classificação de poliedros, bem como do próprio teorema que é reescrito da seguinte maneira: "a característica de Euler de poliedros simples é 2."

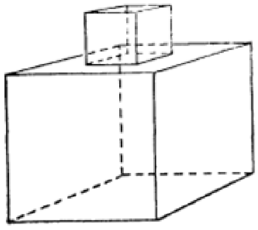
O sucesso da conjectura reformulada dura somente até a apresentação de um novo contraexemplo, apresentado no texto pelo aluno Alfa, mas originalmente tratado por Lhuilier, em 1812: um poliedro constituído de um cubo com outro cubo menor sobre ele. Este objeto atende todas as definições de poliedro propostas, sendo também um poliedro simples, já que pode ser planificado. Então, de acordo com a

---

[16] Esta intuição de Alfa é um dos princípios básicos do ramo da Matemática chamado de Topologia, em especial da Topologia Geométrica que se dedica ao estudo das propriedades dos objetos que são preservadas quando se operam deformações, torções e extensões, desde que não ocorram rasgos ou rupturas. Como no comentário do texto, um poliedro convexo é topologicamente equivalente a uma esfera e o contraexemplo denominado "moldura" é topologicamente equivalente a um toro.

conjectura modificada deveria ter característica 2, mas tem 16 vértices, 24 arestas e 11 faces e, nesse caso $V - A + F = 3$.

Figura 8 – Contraexemplo 5: o cubo encristado



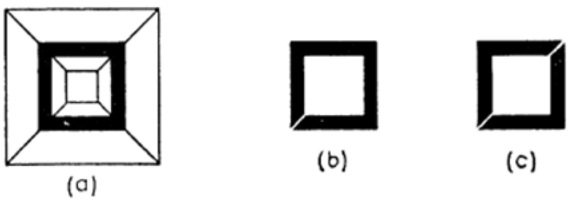
Fonte: LAKATOS, 1977, p. 34

Seguindo o procedimento sugerido pelo Professor, a conjectura deve ser avaliada minuciosamente para que se identifique qual estágio desde o enunciado até as etapas do experimento mental foi afetado pelo novo contraexemplo e, em seguida, incorpora-se um novo lema ou realiza-se um aperfeiçoamento de um lema já existente.

O cubo encristado coloca em questão a segunda etapa do quasi-experimento, que admitia que, após a planificação, a inclusão de uma diagonal nas faces já existentes aumentaria uma unidade na quantidade tanto de faces como de arestas. A planificação deste sólido, no entanto, gera uma face chama de face anelar, em que uma única diagonal não é suficiente para o aumento da quantidade de faces.

Na figura seguinte, a face anelar está destacada (a) e mostra-se que ao traçar a primeira diagonal (b), não se obtém a divisão da face, sendo necessária uma segunda diagonal (c).

Figura 9 – Planificação do cubo encristado e ocorrência de face anelar



Fonte: LAKATOS, 1977, p. 35

Assim, outra definição auxiliar se torna necessária: a ideia de faces simplesmente conexas, descritas como “aquelas que são seccionadas em duas partes por uma única diagonal”. A conjectura também sofre reformulação: “Para um poliedro simples, com as faces conexas simplesmente, $V - A + F = 2$.”

O método denominado por Lakatos de incorporação de lemas é um núcleo importante de sua proposta para a avaliação das conjecturas associadas a suas provas e se apresenta como um caso limite da estratégia do impedimento de exceções, mas com a sofisticação de fazer uma cuidadosa análise da prova e delinear cuidadosamente a área proibida.

Lakatos explica que o método da antiexceção aperfeiçoava a conjectura, sem que a prova fosse levada em conta. O método denominado “incorporação do lema” faz uso de uma unidade intrínseca entre a lógica da descoberta e a lógica da justificação. Neste aspecto, oferece uma crítica franca a importantes matemáticos de sua época como Hardy e Littlewood, que enfrentavam o dilema entre a expectativa de provas infalíveis, baseada na doutrinação dogmática, e a percepção da falibilidade de algumas dessas provas:

> Matemáticos aplicados normalmente resolvem este dilema com uma crença constrangida mas firme de que as provas dos matemáticos puros são “completas” e realmente provam. Os matemáticos puros, no entanto, são precavidos e têm tal respeito somente pelas “provas completas” dos lógicos. Se perguntados sobre qual o uso, a função de suas “provas incompletas”, muitos ficariam perdidos . (LAKATOS, 1977, p. 29)

Lakatos reconhece a influência em seu método das ideias de Pólya, que descreve, em uma obra de 1927, escrita em parceria com Segö, um procedimento para a avaliação de uma prova matemática:

> Deve-se examinar minuciosamente cada prova para ver se, de fato, foram usadas todas as suposições; deve-se tentar obter as mesmas consequências a partir de menos suposições... e não se deve ficar satisfeito até que os contraexemplos mostrem que se já atingiu o limite das possibilidades. (PÓLYA; SEGÖ, 1927 apud LAKATOS, 1977, p. 38)

Lakatos considera que, enquanto os matemáticos de formação dogmática buscam melhorar suas conjecturas pelo “monótono crescimento da verdade”, sua abordagem é melhor, pois inicia pela concepção de uma prova em um domínio de validade, mas progride ao submetê-la a uma investigação constante.

Os testes frequentes impostos à prova verificam se cada condição exigida para o experimento mental está devidamente estabelecida na redação da conjectura e, continuando o exame detalhado chega à terceira etapa da demonstração, que estabelece a retirada dos triângulos da malha planificada, em uma determinada ordem que não altere a relação $V - A + F = 1$.

Usando o método da incorporação de lema, a conjectura é outra vez reescrita como:

"Todo poliedro é euleriano se:

(a) for simples,

(b) tiver cada face simplesmente conexa e

(c) for de tal forma que a rede triangular plana, (resultado de planificação seguida de triangulação), pode ser numerada tal que, ao remover na ordem adequada, $V - A + F$ não se altera até o último triângulo."

A respeito da garantia de ser sempre possível estabelecer uma ordem de retirada dos triângulos que não altere a característica euleriana da malha, Lakatos afirma que isso fora provado por Reichardt, em 1941, e por van der Waerden, em 1951, enquanto Hilbert e Cohn-Vossen apenas afirmaram que "era fácil perceber".

Acrescentando uma regra auxiliar ao método de incorporação de lema, assim enunciada: "não transformamos em condições aqueles lemas que podem ser comprovados, nem incorporamos lemas que podem ser comprovados por lemas anteriores." (LAKATOS, 1977, pp. 40) e considerando as provas de Reichardt e de van der Waerden, a terceira condição seria excessiva, por ser uma consequência da primeira.

Um retrospecto da evolução do enunciado do teorema até este momento do texto de Lakatos mostra um percurso que Pólya diria ser a transformação de uma ingênua conjectura original em um genuíno teorema:

- uma conjectura ingênua: "Todo poliedro é euleriano".

- o método de impedimento de monstros, que defendia a manutenção da formulação original, exigiu a necessidade de mudanças nos significados dos termos (poliedro, polígono, aresta etc.) ou mesmo uma primeira redação de definições que ainda não haviam sido apresentadas.

- a exclusão das exceções introduziu o importante conceito de convexidade e o enunciado passou a ser tratado como: "Todo poliedro convexo é euleriano."

- o método da incorporação de lema reuniu a prova à conjectura: "Todo poliedro simples com faces simplesmente conexas é euleriano."

Guiadas pelo objetivo de barrar as anomalias e estabelecer um domínio de validade restrito e confiável para a conjectura de Euler-Descartes, as estratégias de impedimento de monstros e exceções trouxeram à tona a necessidade de formalização dos conceitos e de reformulação do enunciado original.

O método de incorporação de lema também resulta em um amadurecimento da teoria pela sofisticação de termos e reescrita do teorema, porém, sua finalidade é distinta das estratégias mencionadas, pois não se comporta como uma tentativa de uma mera exclusão dos "monstros", mas incorpora as etapas do experimento mental, após cuidadosa investigação dos contraexemplos.

Lakatos, no ensaio *A renaissance of empiricism in the recent Philosophy of Mathematics*, comenta que "a epistemologia clássica modelou, por dois mil anos, seu ideal de uma teoria, científica ou matemática, na concepção da geometria euclidiana." Uma teoria euclidiana ideal seria, assim, um exemplar de um sistema dedutivo com um conjunto finito de axiomas que inserem os valores de verdade no topo, permitindo que fluam por canais lógicos seguros, atingindo todas as preposições e inferências derivadas.

Particularmente nas ciências naturais, Lakatos observa que as teorias modernas dificilmente se organizavam nos moldes euclidianos, sendo mais comuns as teorias quasi-empíricas. Apesar de apresentar semelhanças com as teorias euclidianas como o procedimento dedutivo e a necessidade de um conjunto de regras que normatizam a transmissão lógica, uma teoria quasi-empírica se diferencia por ter sua inserção de valores de verdade na parte inferior do sistema, isto é, nos "enunciados básicos".

O fluxo lógico em uma teoria quasi-empírica ocorre no sentido contrário de uma teoria euclidiana e o tipo de valor transmitido é também o oposto, pois é o falseamento que segue dos enunciados básicos indo para cima em direção aos axiomas. A inversão do sentido de transmissão de valores lógicos de uma teoria quase-empírica em relação ao modelo euclidiano não caracteriza um apelo à indução, mas valoriza o teor falseabilista.

O método de incorporação de lema de Lakatos contém uma diferença importante em relação a essas teorias, pois não admite uma dinâmica linear em sua "lógica de descobertas", mas substitui por um movimento de zigue-zague, que ora está avaliando os contraexemplos, ora retorna às condições iniciais da conjectura e pode repetir essas etapas continuamente. A teoria lakatosiana anseia por dar resposta para a questão de identificar, nesse processo, a "Lógica da descoberta" que os popperianos afirmavam pertencer ao terreno do psicologismo.

Lakatos explica que esse procedimento é feito de tal forma que, ao se obter finalmente o enunciado do teorema aperfeiçoado pela incorporação dos lemas, não é possível identificar quais elementos são oriundos da conjectura ingênua inicial e quais foram obtidos pelos ajustes após a análise dos contraexemplos. Por exemplo, um leitor que tome contato com o teorema já enunciado como "Todo poliedro simples com faces simplesmente conexas é euleriano" possivelmente não seria capaz de afirmar com segurança quais elementos foram inseridos graças aos lemas incorporados.

2.4.8 CRÍTICA DA ANÁLISE DE PROVA POR CONTRAEXEMPLOS QUE SÃO GLOBAIS, MAS NÃO LOCAIS. O PROBLEMA DO RIGOR.

Após a apresentação de seu método de incorporação de lema, o foco passa a ser a questão do rigor na análise da prova, com uma proposta de classificação dos contraexemplos, a saber:

- local, mas não global (não refuta o teorema),
- simultaneamente local e global (ao invés de refutar, confirma o teorema), e
- global, mas não local (refuta o teorema).

É válido salientar que, quando se avalia se um contraexemplo refuta ou não o teorema, considera-se a última formulação obtida através do método de incorporação de lema, já que, em função do próprio método, não faz sentido a expectativa da obtenção de um enunciado definitivo.

Sobre a taxonomia proposta, os contraexemplos do primeiro tipo são justamente aqueles que contrariam um dos lemas e levam, pelo método de Lakatos, à reformulação da conjectura.

Os contraexemplos do segundo tipo – locais e globais ao mesmo tempo – são identificados por Lakatos como um caso do paradoxo da confirmação indutivista de

Hempel[17]. No caso em questão, seriam amostras os objetos para os quais não se aplica pelo menos um dos lemas do experimento de Cauchy e que não confirmam a relação $V - A + F = 2$.

Um candidato a contraexemplo do terceiro tipo deveria ser um objeto que não contrariasse nenhum dos lemas, mas para o qual não fosse válida a relação $V - A + F = 2$. Estes contraexemplos são desejáveis, pois, na ideia de Lakatos são eles que provocam o dinamismo de revisão dos lemas e, consequentemente, da conjectura aprimorada.

O aluno Gama, em outros momentos do debate, havia sugerido como contraexemplo um cilindro, rejeitado pelos outros participantes como uma aberração ou mesmo uma tentativa de chacota, por não ser considerado um elemento legítimo a ser tratado pela conjectura, mas volta a apresentá-lo como uma suposta amostra de um contraexemplo do terceiro tipo.

O argumento a favor de considerar o cilindro como um contraexemplo viável (do terceiro tipo) é defendido por não afrontar os lemas incorporados, visto que (i) pode ser "inflado" como uma esfera e, portanto, pode ser planificado se retirada uma de suas bases e (ii) qualquer diagonal traçada após a planificação gera uma nova face. No entanto, apesar de cumprir as etapas do experimento mental, no caso do cilindro, $V - A + F = 1$, considerando que há três faces (as duas bases e o invólucro), duas arestas (dois círculos) e nenhum vértice.

Uma estratégia empregada pelos debatedores para incluírem o cilindro na classe de contraexemplos do segundo tipo, é a reformulação dos lemas com maior precisão, de tal forma que não mais seja possível realizar, no objeto em questão, as etapas de planificação e triangulação da malha. Este acréscimo de detalhes nas

---

[17] O paradoxo dos corvos de Carl Hempel (1905-1997) frequentemente é apresentado como a contradição de duas intuições: 1) o critério de Jean Nicod (1893-1924) que postula que, na generalização de que todo A é B, as evidências de um exemplar que não é A, nem B ou de um particular que é B, mas não é A são irrelevantes e 2) a ideia de que uma evidência que confirme uma hipótese deve confirmar quaisquer hipóteses materialmente equivalentes. O exemplo escolhido por Hempel é a sentença "todos os corvos são pretos" ou $(\forall x)(C(x) \rightarrow P(x))$ que tem o mesmo valor lógico de "tudo que não é preto não é corvo" ou $(\forall x)(\neg P(x) \rightarrow \neg C(x))$. Isto significa que, para a confirmação da hipótese inicial, a evidência de um corvo negro é tão válida quanto a evidência de um objeto não-negro que seja também não-corvo (por exemplo, uma maçã verde). (CRUPI, V., "Confirmation", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2016*. Zalta, E. (ed.), https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/confirmation/)

formulações do primeiro e segundo lemas, atende o que Pólya considera um exercício necessário:

> Uma situação não pouco frequente na pesquisa matemática é: um teorema já está formulado, mas temos que dar significados mais precisos aos termos nos quais ele está formulado para que se apresente estritamente correto. (PÓLYA, 1954)

Para o primeiro lema, o texto mais preciso deveria ser: “se uma face for retirada, as demais devem permanecer conectadas”. No caso do cilindro, se uma das bases for retirada, a planificação tal como proposta no experimento é possível, porém, se a “face” retirada for o invólucro cilíndrico, as duas bases circulares ficariam separadas.

Mesmo considerando que se obrigasse a retirada de uma face específica e se obtivesse uma planificação, a segunda etapa do experimento é contrariada se for assumida uma definição de um elemento que até então havia sido utilizado sem uma descrição mais cuidadosa: “uma diagonal é uma aresta que liga dois vértices não-adjacentes.”

Considerando este significado para “diagonal” coloca-se em questão a necessidade de trazer à luz uma cláusula existencial para o segundo lema, que trata da triangulação da malha plana: devem existir diagonais (de fato ou potencialmente) para que realize a ação de triangulação.

Novamente tratando do contraexemplo do cilindro, ainda que se admita uma eventual planificação, não há como traçar diagonais (que devem ligar vértices) dado que não há vértices. Logo, não é possível obter a malha triangular.

Esclarecer esses lemas ocultos, como os denomina Lakatos, foi a maneira utilizada por matemáticos como Becker (1869), Poincaré (1908), Steinitz (1914) e Gamow (1961) que, identificando os contraexemplos, reescreveram o teorema, tornando sua formulação mais precisa, com o prejuízo de sua generalidade, visto que o enunciado original de Euler deveria ser aplicável a qualquer poliedro.

No entanto, a tentativa de explicitar a totalidade dos lemas ocultos é tão impraticável como a suposição dos defensores do impedimento de monstros que pretendiam produzir uma lista de todas as anomalias possíveis.

Lakatos, tomando o cuidado para que seu método de incorporação de lemas não se tornasse apenas outra visão dogmática a respeito das ciências e da

Matemática, afirma que o exercício cuidadoso da análise da prova deve levar a um teorema aprimorado, mas não se tem a pretensão de alcançar um teorema perfeito.

Deve ser observado, nessa análise da prova, o que Lakatos chama de princípio de retransmissão de falsidade, já que “uma análise de prova é rigorosa ou válida e o teorema matemático correspondente é verdadeiro se, e somente se, não há nenhum contraexemplo do terceiro tipo” (LAKATOS, 1977, p. 47). Ao esclarecer os lemas ocultos, a análise da prova transforma os contraexemplos do terceiro tipo em contraexemplos do segundo tipo.

Mesmo nos casos em que não são verificados inicialmente contraexemplos, o método pode ser seguido, como acreditava Russell, ao menos na primeira fase de seu pensamento: “é um dos principais méritos das provas que elas incutem certo ceticismo quanto ao resultado provado.” (RUSSELL, 1903 apud LAKATOS, 1977, p. 48).

É válido recordar que Lakatos se posiciona contrariamente a qualquer postura que estabelece uma condição definitiva e infalível aos resultados obtidos pela Matemática, descartando a possibilidade de correções. Portanto, o mesmo Russell, a partir do momento em que adere ao projeto logicista, deixa de ser uma referência de apoio ao programa lakatosiano para se tornar alvo de críticas.

Mesmo nas ocasiões em que não são encontrados contraexemplos em profusão, o que tende a elevar o teorema e sua prova a um maior nível de confiabilidade, Lakatos recomenda que não seja esquecida a análise da prova e que não se coloquem prova e refutação em compartimentos separados.

O “método de incorporação de lemas”, rebatizado como “método de prova e refutações”, é, então, apresentado didaticamente sob a forma de três regras heurísticas:

> **Regra 1**: Se você tem uma conjectura, tente prová-la e refutá-la. Inspecione cuidadosamente para preparar uma lista de lemas não triviais (análise da prova); encontre contraexemplos tanto para a conjectura (globais) como para os lemas suspeitos (locais).
> **Regra 2**: Se você tiver um contraexemplo global, descarte sua conjectura; acrescente à sua análise da prova um lema adequado que será refutado pelo contraexemplo e substitua a conjectura descartada por uma aperfeiçoada que incorpore tal lema como uma condição. Não permita que uma refutação seja

> desconsiderada como uma monstruosidade. Torne todos os “lemas ocultos” explícitos[18].
> **Regra 3**: Se você tiver um contraexemplo local, verifique se é também um contraexemplo global. Se for, use a Regra 2. (LAKATOS, 1977, p. 50)

2.4.9 PROVA VERSUS ANÁLISE DE PROVA. O RELATIVISMO DOS CONCEITOS DE TEOREMA E RIGOR NA ANÁLISE DE PROVA.

Na seção que se dedica a tratar do rigor na análise da prova, Lakatos ensaia uma reconstrução histórica sobre esse tema, identificando como primeiro momento de interesse a virada do século XVIII para o século XIX.

Até cerca de 1800, a ideia de prova matemática estava firmemente associada às características de rigidez e infalibilidade atribuídas à Matemática em si. No início do século XIX, principalmente com os estudos de Cauchy e Weierstrass em análise e a profusão de contraexemplos encontrados, foi que o rigor passou a ser algo a ser buscado com esforço, já que até então era admitido tacitamente.

Com os estudos das geometrias não euclidianas e graças à teoria dos conjuntos de Cantor, houve nova enxurrada de contraexemplos, atingindo teoremas basilares de teorias matemáticas; a reação dos defensores do rigor passou a ser a adoção de uma postura dogmatista.

Na tentativa de combater o que era considerado um pedantismo lógico-linguístico na análise das provas, ocorreu o que Lakatos classifica como uma “contrarrevolução intuicionista”. Ainda de acordo com o autor de P&R, uma tentativa de manter a união entre lógica e matemática foi feita pelos logicistas, levando a uma série de paradoxos; outra foi empreendida por Hilbert que apenas transladou o problema da busca pelos fundamentos para um novo domínio, o da meta-matemática.

Lakatos aproveita este retrospecto para concluir que “diferentes níveis de rigor se distinguem apenas em relação ao local em que traçam a linha entre o rigor da análise da prova e o rigor da prova, i. e., em relação ao momento em que a crítica deve parar e a justificação deve começar .” (LAKATOS, 1977, p. 56)

---

[18] Lakatos afirma que a Regra 2 foi estabelecida a partir de proposições de Seidel (1847) e Darboux (1874; 1883).

Em outro trabalho, intitulado *Infinite regress and the foundations of Mathematics*, Lakatos explora ainda mais este tema e se posiciona firmemente contra a noção de que exista algo como “intuições finais” na Matemática:

> Por que, afinal de contas, há testes ‘definitivos’ ou autoridades ‘finais’? Por que fundamentos, se estes são admitidos subjetivamente? Por que não admitir honestamente a falibilidade matemática e tentar defender a dignidade do conhecimento falseável contra o ceticismo cínico ao invés de iludirmos a nós mesmos que seremos capazes de consertar invisivelmente a derradeira ruptura no tecido de nossas intuições finais? (LAKATOS, 1997b, p. 23)

No debate entre os alunos, uma metáfora bastante ilustrativa aparece quando Alfa menciona que a análise da prova aproximada desenha um contorno da classe de poliedros de Cauchy com um “lápis” que não é tão afiado.

Os contraexemplos levam a “apontar o lápis”, mas nenhum lápis é absolutamente afiado, pois se nós o afiarmos repetidamente ele pode quebrar. O ato de “apontar o lápis” é fruto de uma “intuição madura” e não deve ser rejeitado como um psicologismo, como um recurso do pragmatismo nem tampouco estabelecido dogmaticamente.

Esta reconstrução esboçada por Lakatos fornece uma base para o estudo em que se avalia, na seção 3.3.1, o papel de uma abordagem heurística na busca pelo rigor das provas e teoremas matemáticos.

2.4.10 CRÍTICA DA PROVA POR CONTRAEXEMPLOS QUE SÃO LOCAIS MAS NÃO GLOBAIS. O PROBLEMA DO CONTEÚDO.

Ainda no espírito da análise da prova, a seguinte regra é acrescentada ao método de prova e refutações:

Regra 4: se você tiver um contraexemplo que é local mas não global, busque aperfeiçoar sua análise de prova pela substituição do lema refutado por outro não falseado.

Lakatos afirma que os contraexemplos locais, mas não globais, podem prover uma oportunidade de aprimorar o teorema podendo ocorrer ligeiras modificações dos lemas, mantendo a estrutura da prova original ou, num caso mais extremo, a prova inteira pode ser substituída por outra mais abrangente e mais profunda.

Como exemplos deste segundo caso, são mencionadas as provas de Gergonne e de Legendre:

Prova de Gergonne: imagine que o poliedro seja oco, com suas superfícies feitas de um material rígido, como papelão. Considere o interior iluminado e que exista pelo menos uma face a partir da qual, como se fosse a lente de uma câmera, possam ser visualizados todos os vértices e arestas.

Ao se "fotografar" o interior do poliedro, se produz uma rede planificada, tal como na prova anterior, em que $V - A + F = 1$ e, adicionando a face da "lente" se obtém a fórmula de Euler.

Os poliedros assim transformados (com uma das faces sendo a "lente") são definidos como quase convexos e a formulação do teorema se torna: "Todo poliedro quase convexo com faces simplesmente conexas é euleriano."

Prova de Legendre: considere o poliedro no interior de uma esfera de raio unitário, com um ponto em seu interior que será considerado o centro de uma projeção na superfície da esfera de uma rede de polígonos esféricos.

O primeiro lema é a existência desse ponto e o segundo diz que nesta rede, $V - A + F = 2$. Esta prova[19] é restrita a poliedros convexos e alguns quase convexos "bem-comportados".

Assim como a prova de Cauchy, essas também não são ideais, pois, se tal prova tivesse caráter definitivo, não deveriam restar contraexemplos no interior do teorema nem haver exemplos válidos fora dele. Deveria ser traçada uma linha divisória clara entre exemplos e contraexemplos e não meramente a restrição de um domínio seguro. Em outras palavras, uma prova ideal deveria estabelecer totalmente

---

[19] De forma resumida, a prova de Legendre é assim apresentada em Lima (1991): sejam um poliedro convexo P, com V vértices, A arestas e F faces e uma esfera E, de raio r, com centro em O, ponto interior do poliedro P. Suponhamos, sem perda de generalidade, que as faces de P são triângulos, pois se não é esse o caso, sempre é possível decompor cada face em triângulos. Projetando radialmente o poliedro P sobre a esfera E, teremos uma decomposição de E em triângulos esféricos T_i, $i = 1,2, \ldots, F$ dispostos de maneira similar à disposição no poliedro P. Em particular, a esfera E fica recoberta por F triângulos esféricos T_i, com um total de V vértices e A lados. Pelo Teorema de Girard, se α, β e γ são ângulos internos de um triângulo esférico, medidos em radianos, então $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$ em que a é a área desse triângulo. Portanto, segue que $S_i = \pi + \frac{a_i}{r^2}$, onde S_i é a soma das medidas em radianos dos ângulos internos e a_i a área do triângulo esférico T_i. A soma total das medidas em radianos dos ângulos internos desses triângulos é dada por $\sum_{i=1}^{F} S_i = F.\pi + \frac{\sum_1^n a_i}{r^2}$. Outras duas informações úteis são: a soma dos ângulos em torno de cada vértice é 2π, o que acarreta que $\sum_{i=1}^{F} S_i = 2\pi.V$ e a área da superfície esférica E é igual a $4\pi r^2$, portanto $\sum_1^n a_i = 4\pi r^2$. Com as devidas substituições, $2\pi V = F.\pi + \frac{4\pi r^2}{r^2}$ de onde segue que $2V = F + 4$ e, em consequência, $2V - F = 4$. Para obtermos uma relação entre F (a quantidade de triângulos esféricos) e A (quantidade de arestas), basta perceber que todo triângulo tem três lados e toda aresta é lado de dois triângulos vizinhos, assim $3F = 2A$, então $F = 2A - 2F$. Portanto, $2V - F = 4$ o que pode ser expresso como $2V - 2A + 2F = 4$, e, finalmente, $V - A + F = 2$.

as condições do teorema, não somente as suficientes, mas também as necessárias.

Em sua interpretação, o interesse pelo incremento do conteúdo em uma teoria é importante e, por isso mesmo, não deve haver a imposição de uma conduta que descarte as provas (mesmo quando estas não apresentam, sob alguma ótica arbitrária, todas as condições necessárias e suficientes).

À base de síntese da seção, o título do método é novamente alterado (um recurso elegante de Lakatos) e chega finalmente a ser chamado de "método de provas e refutações", cuja evolução é narrada pelo aluno Mu, em termos "quase topológicos":

> O método de incorporação de lemas produzia uma sequência convergente de domínios de sucessivos teoremas aperfeiçoados; estes domínios diminuíram sob o contínuo ataque de contraexemplos globais no processo de surgimento de lemas ocultos e convergiram para um limite: o "domínio da análise de prova".
> Se aplicarmos a versão mais tênue da Regra 4, este domínio pode ser ampliado sob a contínua pressão de contraexemplos locais. Esta sequência expansiva novamente tem um limite: "o limite da prova". Este domínio pode ser bastante estreito (até vazio).
> Precisaríamos então de provas mais profundas cujos domínios formem uma sequência expansível incluindo cada vez mais poliedros eulerianos que eram contraexemplos locais para suas provas prévias. (LAKATOS, 1977, p. 64)

Lakatos verifica dois movimentos em sua reconstrução histórica: primeiro o enunciado conjectura de Euler tem como domínio "todos os poliedros", mas pela observação de contraexemplos, este domínio sofre redução para uma categoria restrita; em um segundo momento, a formulação de outras provas como as de Gergonne e Legendre incluem no domínio outros poliedros.

No decorrer da análise da prova, o objetivo de estabelecer o "domínio de validade da conjectura" é emparelhado com o estudo da relação entre V, A e F para qualquer poliedro.

Ao argumento de que esta segunda questão é um acréscimo desnecessário ou uma complicação do problema inicial, Lakatos responde com uma menção ao que Pólya (1954) chama de o *paradoxo do inventor*: "mais questões podem ser mais fáceis que apenas uma. Um novo problema, mais ambicioso, pode ser mais fácil de tratar do que o problema original".

A questão enfatizada por Lakatos é que a procura pelo domínio de validade do "eulerianismo", isto é, a característica $V - A + F = 2$, ocultou que há incontáveis outros poliedros para os quais esta relação resulta em valores distintos e que podem ser igualmente interessantes.

Ao considerar uma tabela como a apresentada a seguir, que lista a quantidade de faces, vértices e arestas de alguns poliedros – todos os quais eulerianos –, não parece ser tão trivial identificar uma fórmula que consiga “extrair a ordem do caos”.

Poliedros	**F**	**V**	**A**
Cubo	6	8	12
Prisma triangular	5	6	9
Prisma pentagonal	7	10	15
Pirâmide quadrada	5	5	8
Pirâmide triangular	4	4	6
Pirâmide pentagonal	6	6	10
Octaedro	8	6	12
“Torre”	9	9	16
Pirâmide pentagonal truncada	7	10	15

Acompanhando a proposta de Pólya em sua obra *Mathematics and plausible reasoning* (1954, vol. I, pp. 36-43), as tentativas de se encontrar alguma regularidade nas quantidades de arestas, vértices e faces poderiam ser assemelhadas aos procedimentos adotados por cientistas naturais que, de posse de um conjunto de dados a respeito de um fenômeno, procuram organizá-los e elaboram hipóteses sobre as relações entre as variáveis envolvidas para a construção de sua teoria.

Pólya inicialmente se questiona se a variação da quantidade de faces está de alguma forma relacionada com a variação da quantidade de vértices ($F \leftrightarrow V$). Como isto não se verifica para todos os exemplares da tabela, as novas sugestões procuram relacionar a variação da quantidade de faces e arestas ($F \leftrightarrow A$) e, em outro momento, de vértices e arestas ($V \leftrightarrow A$).

Como nenhuma desses testes contempla todos os poliedros listados na tabela, uma conjectura que obtém sucesso é a suposição de uma relação que associa a variação da quantidade de arestas com a variação da quantidade de vértices somada à quantidade de faces ($V + F \leftrightarrow A$).

O estudo de Pólya ao qual Lakatos se refere é uma tentativa de reconstruir o exercício mental[20] realizado por Euler antes de enunciar sua proposição sobre os poliedros. O matemático alemão teria feito uso, nessa etapa, daquilo que Pólya chama de “raciocínio plausível”, que se distingue do raciocínio demonstrativo pelas seguintes características:

> O raciocínio demonstrativo é seguro, não controverso e definitivo. O raciocínio plausível é perigoso, controverso e provisório. O raciocínio demonstrativo penetra nas ciências, tanto quanto a matemática, mas é por si mesmo (como a matemática é por si mesma) incapaz de render um conhecimento essencialmente novo sobre o mundo que nos rodeia. Qualquer coisa nova que aprendemos sobre o mundo envolve um raciocínio plausível, que é o único tipo de raciocínio com que nos preocupamos nos assuntos do cotidiano. O raciocínio demonstrativo tem rígidos padrões, codificados e esclarecidos por lógica (lógica formal ou demonstrativa), que é a teoria do raciocínio demonstrativo. Os padrões do raciocínio plausível são fluidos e não existe uma teoria de tal raciocínio que possa ser comparada com a lógica demonstrativa em clareza ou que possa levar a um consenso comparável. (PÓLYA, 1954, p. v)

Em outra obra, Pólya usa o termo “raciocínio heurístico” definido como “o raciocínio não considerado como final e estrito, mas como provisório e plausível” (PÓLYA, 1973, p. 113), justificando que, enquanto não se encontra uma solução completa de um problema, são importantes as conjecturas mais ou menos plausíveis e traça uma analogia entre o raciocínio plausível e os andaimes necessários durante a construção de um edifício.

Sobre o processo de obter provas seguras, após boas conjecturas elaboradas pelo raciocínio heurístico (ou plausível), Pólya apela para a definição que Aristóteles dá sobre a “sagacidade” e diz que quando um cientista tem uma “boa ideia” suficientemente plausível para resolver determinado problema ou explicar um fenômeno, ocorreu uma “hipótese certeira sobre as conexões essenciais”. (PÓLYA, 1973, p. 58)

Lakatos, percebendo que uma interpretação das ideias de Pólya poderia levar à defesa dos argumentos indutivistas, toma o cuidado de dizer que, ao se observar os

---

[20] Aqui temos um exemplo perfeito do *quasi-experimento*, no sentido dado a esse termo pelo editor dos Novi Comentari (seção 2.4.1). A partir das informações organizadas em uma tabela, algumas contas foram feitas, e houve a tentativa de detectar algum padrão ou regularidade nelas, sem qualquer tentativa de decompô-lo, de isolar seus elementos, de apreender sua estrutura com vistas à obtenção de uma prova.

dados na tabela e buscar as relações entre as quantidades de vértices, faces e arestas, o que se fazia era um exercício de identificar possíveis hipóteses que seriam posteriormente testadas.

> Agora o que aconteceu foi o seguinte: você tinha três ou quatro conjecturas que por sua vez foram rapidamente refutadas. Sua tabela foi construída no processo de testar e refutar essas conjecturas. Essas conjecturas mortas e agora esquecidas sugeriam os fatos, não os fatos, as conjecturas. As conjecturas ingênuas não são conjeturas indutivas: chegamos a elas por tentativa e erro, através de conjecturas e refutações. Mas se você erroneamente acreditar que você chegou a elas de forma indutiva, a partir de suas tabelas, se você acredita que quanto mais extensa a tabela, mais conjecturas ela irá sugerir, e mais tarde lhes dará suporte, você pode desperdiçar seu tempo compilando dados desnecessários. Além disso, sendo doutrinados a acreditar que o caminho da descoberta é dos fatos para as conjecturas, e da conjectura para a prova (o mito da indução), você pode esquecer completamente a alternativa heurística: suposição dedutiva. (LAKATOS, 1977, p. 73, grifos nossos)

Lakatos abrange no conceito de suposição dedutiva o raciocínio heurístico de Pólya e uma dupla recusa ao procedimento indutivista, que pretende chegar à generalização pelos particulares, e à sugestão dedutivista, que considera o caminho dos axiomas aos teoremas como a única trajetória possível. As conjecturas iniciais, mesmo que ingênuas, não são frutos da mera observação dos fatos, mas surgem de um processo lógico, racional e heurístico.

A heurística matemática é bastante similar à heurística científica não porque ambas sejam indutivas, mas porque ambas são caracterizadas por conjecturas, provas e refutações. A diferença importante está na natureza das respectivas conjecturas, provas (ou, na ciência, explicações) e contraexemplos .

Lakatos faz uma menção de louvor a Pólya por ter sido o responsável pelo renascimento da heurística matemática no século XX, mas não deixa de registrar uma leve crítica dizendo que “o que pode ser considerado sua única fragilidade relaciona-se com sua força: ele jamais questionou que a ciência é indutiva e, devido à sua correta visão da profunda analogia entre heurística científica e matemática foi levado a pensar que a matemática é indutiva”. (LAKATOS, 1997b, p. 102)

O autor entende que não há distinções de procedimentos para a Matemática em relação às ciências e, novamente, o percurso não deve ser visto como um fluxo indutivista, que leva dos fatos às teorias, nem como um “euclidianismo” estrito que acaba por concentrar demasiados esforços no estabelecimento de seus fundamentos.

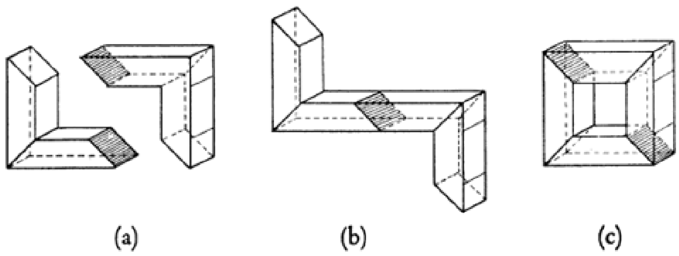
A “alternativa heurística”, como denomina Lakatos, é fazer uso das suposições dedutivas, que podem resultar em outros experimentos, diferentes daquele de Cauchy.

Para tanto, outras observações são apresentadas por Lakatos, nas intervenções do pupilo Zeta, extraídas de trabalhos de Lhuilier (1812-13), Hessel (1832) e Raschig (1891). A preocupação desses autores era estabelecer uma formulação que contemplasse os contraexemplos como a moldura e o cubo aninhado, trazendo-o para o domínio de validade do teorema aperfeiçoado.

Uma definição utilizada nessa alternativa de formulação é a de *poliedro normal fechado*: uma superfície fechada de polígonos perfeitos[21] que é obtido respeitando a seguinte construção: dado um polígono perfeito, são acrescidos $F-2$ polígonos de tal forma que não se altere a relação $V-A+F$ (nesta etapa é construído um poliedro normal aberto) e, finalmente, é adicionado um último polígono que aumenta $V-A+F$ em uma unidade.[22]

Tomados dois poliedros normais (a), eles podem ser unidos, caso tenham faces com o mesmo número de vértices, pelo encaixe de uma face de cada, sem alterar $V-A+F$. (b) ou pelo encaixe de duas faces de cada um que incrementa $V-A+F$ em uma unidade (c), como indicado nas figuras seguintes.

Figura 10 – Poliedros normais



Fonte: LAKATOS, 1977, p. 77

[21] Um polígono perfeito é aquele que pode ser construído a partir de um único vértice ao qual se vão acrescentando $n-1$ arestas sem alterar a relação $V-A$ e, finalmente uma aresta final para fechá-lo, causando um decréscimo de 1 na relação $V-A$.

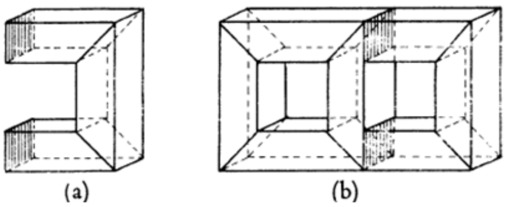
[22] Como exemplo, considere um pentágono ao qual se acrescenta primeiro cinco quadriláteros e depois outro pentágono, formando um prisma de base pentagonal.

O novo enunciado do teorema proposto é: “todos os poliedros normais fechados são eulerianos”. O experimento segue, considerando que quando há dois poliedros normais fechados, $V - A + F = 4$ (os dois juntos) e, se uma face de cada um deles for unida, como no item (b) da figura anterior, $V - A + F = 2$ e o poliedro resultante pode ser inflado como uma esfera.

Se, no entanto, forem “coladas” duas faces de cada um dos poliedros normais iniciais, como no item (c), teremos $V - A + F = 0$, pois 4 faces deixarão de ser contadas (isso equivale ao contraexemplo da moldura).

Continuando, se for juntado a esse poliedro outro poliedro normal, mostrado na figura 11 (b), a relação passa a ser $V - A + F = -2$.

Figura 11 – Poliedros normais n-esferoidais



Fonte: LAKATOS, 1977, p. 77

Por esses três primeiro exemplos, enuncia-se uma suposição generalizante: “para um poliedro monoesferoide, $V - A + F = 2$, para um diesferoide, $V - A + F = 0$, para um triesferoide, $V - A + F = -2$ e, para um n-esferoide: $V - A + F = 2 - 2(n - 1)$.

Admitida a verdade dessa intuição, seria equivalente dizer que os poliedros que podem ser “inflados” como uma esfera terão característica de Euler igual a 2; como um toro, característica 0; como um bitoro, característica -2, e assim por diante.

Com esta nova definição e experimento, o contraexemplo da moldura agora é incorporado ao domínio de validade. Permanecem excluídos, no entanto, vários poliedros já mencionados sob o título de contraexemplos, como o cubo encristado, em que dois poliedros são unidos por uma de suas faces ou casos como o par de cubos encaixados, em que os dois poliedros apresentam superfícies desconexas (cavidades).

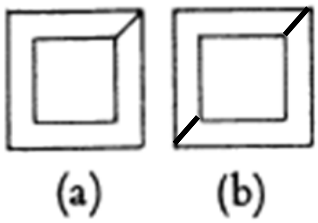
Pretendendo dar conta também desses elementos, baseando-se ainda nas ideias de Lhulier, novos experimentos são empreendidos, chegando, sucessivamente a outras duas expressões, cada qual com mais detalhes que a anterior. Por exemplo, a expressão

$$V - A + F = 2 - 2(n-1) + \sum_{k=1}^{F} e_k$$

é aplicável a exemplos como o cubo encristado.

Na fórmula, e_k corresponde ao número de arestas que podem ser acrescidas sem o aumento no número de faces (para cada uma das faces, da primeira até a F-ésima) após a operação de planificação, em que ocorre pelo menos uma face anelar. Para uma face desse tipo, como mostrado na figura seguinte, o acréscimo de uma nova aresta (a) não divide a face, sendo necessária para causar o acréscimo de uma nova face na malha o traçado de uma segunda aresta (b).

Figura 12 – Face anelar após a planificação



Fonte: LAKATOS, 1977, p. 79

Outra expressão expande ainda mais o domínio de validade, contemplando os contraexemplos como o par de cubos encaixados, em que existam superfícies desconexas.

$$V - A + F = \sum_{j=1}^{K} \left\{ 2 - 2\left(n_j - 1\right) + \sum_{k=1}^{F} e_{kj} \right\}$$

sendo K a quantidade de superfícies desconexas.

No caso citado – o par de cubos encaixados – teríamos $K = 2$ (duas superfícies desconexas), $n_1 = n_2 = 1$ (as duas superfícies são monoesferoides) e $e_{kj} = 0$ para todos índices k e j (não há faces anelares após a planificação de cada superfície); assim:

$$V - A + F = 4.$$

Mais que considerações sobre o desenvolvimento matemático dessas fórmulas, o que importa para a discussão de Lakatos nesta etapa do debate é avaliar a seguinte cadeia de proposições dada por um percurso de raciocínio dedutivo:

i. Um vértice é um vértice.
ii. $V = A$ para polígonos perfeitos (pela definição de como são construídos).
iii. $V - A + F = 1$ para todo sistema poligonal aberto normal (um poliedro normal fechado antes de inclusão da última face).
iv. $V - A + F = 2$ para todo sistema poligonal normal fechado, i.e., para todo poliedro normal.
v. $V - A + F = 2 - 2(n-1)$ para poliedros normais n-esferoidais (a junção de cada poliedro normal que gera uma cavidade causa um decréscimo de 2 unidades na expressão)
vi. $V - A + F = 2 - 2(n-1) + \sum_{k=1}^{F} e_k$ para poliedros normais n-esferoidais com faces multiplamente conexas.
vii. $V - A + F = \sum_{j=1}^{K} \left\{2 - 2\left(n_j - 1\right) + \sum_{k=1}^{F} e_{kj}\right\}$ para poliedros n-esferoidais normais com faces multiplamente conexas e K superfícies desconexas.

São identificados por Lakatos como defensores de um processo dedutivo tal como o apresentado, Descartes, Kant e Poincaré. Referindo-se a uma das regras de Descartes, Lakatos sustenta que uma máxima do filósofo francês era a busca por teoremas que não fossem “evidentes por si mesmos, mas apenas pela dedução a partir de princípios verdadeiros e conhecidos em uma ação ininterrupta da mente que tem uma visão clara de cada etapa do processo.” (LAKATOS, 1977, p. 81)

Lakatos cuidadosamente alerta que devido à apresentação corriqueira da Matemática, muitos chegam a acreditar que o caminho do descobrimento é justamente o que segue dos axiomas aos teoremas e podem cair na cilada da “falácia da dedução” que defende que a sofisticada conclusão “$V - A + F = \sum_{j=1}^{K} \left\{2 - 2\left(n_j - 1\right) + \sum_{k=1}^{F} e_{kj}\right\}$ para poliedros n-esferoidais normais com K superfícies desconexas” foi uma árvore que brotou a partir da trivial semente “um vértice é um vértice”.

Na visão de Lakatos, a crítica é mais importante que um suposto progresso dedutivo contínuo e, na evolução das afirmações (de iv para v, de v para vi e de vi para vii), o elemento gerador da reformulação foi justamente a avaliação de um contraexemplo da hipótese anterior.

A velocidade do crescimento do conteúdo está, portanto, diretamente relacionada à crítica que, por sua vez, depende da ocorrência e correta interpretação dos contraexemplos que refutam total ou parcialmente a conjectura.

2.4.11 Formação de conceitos

A penúltima parte de *Proofs and Refutations* contém uma detalhada explanação sobre a formação de conceitos nas falas do personagem Pi, que se responsabiliza por fazer uma reconstrução do debate, partindo do enunciado e estratégias primeiras de confirmação ou refutação e avaliando os diferentes teoremas e termos teóricos obtidos no percurso.

As primeiras explorações da conjectura tinham interesse na simetria de poliedros regulares e, no caso desses poliedros (simples, convexos, sem cavidades, sem estruturas múltiplas etc.), a conjectura era verdadeira e a prova não tinha falhas.

Então vieram os refutacionistas, que ampliaram o conceito de poliedro. As refutações não revelaram erro na conjectura nem na prova original, mas revelaram a falsidade da conjectura em um domínio mais amplo para o qual não havia sido pensada.

Isso gerou o confronto entre os que pretendiam impedir o ingresso dos “monstros” na conjectura e aqueles que queriam incluí-los. Ambos se valiam da criação de novas definições, uns para preservar e outros para ampliar os conceitos.

Lakatos faz uma revisão histórica do conceito de poliedro, apresentando que, na classificação euclidiana, eram assumidos como poliedros apenas os regulares (os platônicos) e os quase-regulares (prismas e pirâmides). Após o Renascimento, algumas classificações passaram a contemplar também alguns objetos côncavos e os sólidos estrelados propostos por Kepler em 1619.

O incômodo causado pela incerteza a respeito da classificação dos sólidos não convexos e estrelados teve espaço nos trabalhos de Euler (1750), Legendre (1794), Poinsot (1809) e Cauchy (1811). Lakatos aponta que Poinsot ora os considera como poliedros legítimos e ora os rejeita, e que Cauchy estuda algumas propriedades dos sólidos estrelados, mas não os lista como exemplos quando trata de teoremas gerais a respeito de poliedros.

Retomando o discurso do aluno Pi e considerando que o conceito de poliedro não estava claramente estabelecido no princípio do teorema, há a sugestão de substituir o enunciado “todo poliedro simples com faces simplesmente conexas é euleriano” por “todo objeto simples com faces simplesmente conexas é euleriano”.

Um argumento favorável à alteração do teorema é o seguinte exemplo: um globo com um mapa político desenhado não é um objeto da classe original de poliedros, mas também nele é possível empreender a prova de Cauchy. Lakatos indica como defesa dessa proposição as seguintes afirmações de Poincaré e Frechét:

> Matemática é a arte de dar o mesmo nome a coisas diferentes. Se for escolhida a linguagem correta, será surpreendido ao saber que provas feitas para um objeto conhecido aplicam-se imediatamente para muitos novos objetos sem a mínima alteração – podem-se inclusive manter os termos . (POINCARÉ, 1908 apud LAKATOS, 1977, p. 89)
>
> Quando um conjunto de propriedades matemáticas de uma entidade usada na prova de uma proposição não determina esta entidade, a proposição pode ser estendida para ser aplicada a uma entidade mais geral . (FRECHÉT, 1928 apud LAKATOS, 1977, p. 89)

O método de provas e refutações é responsável então por modificações nos conceitos e na aplicação desses conceitos a outros domínios de validade. Lakatos diz, então, que o conceito gerado pela prova não é meramente uma generalização ou uma especificação do conceito ingênuo, mas se estabelece como um conceito radicalmente novo.

Como exemplo, o conceito de poliedro gerado pelo método de provas e refutações no contexto do teorema de Euler-Descartes pode ser aplicado à geometria projetiva de Gergonne, à topologia geral de Cauchy ou à topologia algébrica de Poincaré.

Assim como o termo principal (poliedro), os conceitos auxiliares são purgados pelo método de provas e refutações, partindo de concepções ingênuas e evoluindo no âmbito de uma linguagem teórica.

Este aperfeiçoamento acontece, por exemplo, na explicação dos significados dos termos cavidade, túnel ou polígono interior, no contexto do cálculo da característica de Euler dos diversos poliedros.

Na interpretação de Lakatos, esta evolução causada pela suplantação de conceitos ingênuos por seus aprimoramentos ocorreria não somente nas ideias, mas nos elementos da linguagem que seriam substitutos aperfeiçoados dos termos ingênuos iniciais:

> No que diz respeito à classificação ingênua, os nominalistas estão perto da verdade ao afirmar que a única coisa que os poliedros (ou, para usar o exemplo favorito de Wittgenstein, os jogos) têm em comum é o seu nome. Mas depois de alguns séculos de provas e refutações, à medida que se desenvolve a teoria dos poliedros (ou, digamos, a teoria dos jogos), e a classificação teórica substitui a classificação ingênua, o equilíbrio muda em favor do realista. O problema dos universais deve ser reconsiderado em vista do fato de que, à medida que o conhecimento cresce, as línguas mudam. (LAKATOS, 1977, p. 92)

Lakatos se mostra um tanto ufanista com seu próprio método, pois espera que "no final nós vamos sair de uma classificação acidental para a classificação real e verdadeira, para a perfeita linguagem".

Todas as refutações interessantes são, portanto, heurísticas e, assim que um contraexemplo surge, há uma escolha a ser feita: ou recusar considerá-lo como tal e permanecer na linguagem inicial L1 ou mudar a linguagem a partir da ampliação de conceito e aceitá-lo na linguagem L2.

Trazendo à tona sua crítica às abordagens dogmáticas, Lakatos diz que o racionalismo estático tradicional faz sempre a opção pela primeira alternativa, mas que a ciência ensina a escolher a segunda e acrescenta uma afirmação de Félix (1957, apud LAKATOS, 1977, p. 93): "todo período de criação é um período em que a linguagem se altera."

Neste aspecto, Lakatos demonstra indignação com os positivistas, por considerar que, para esta escola, "a tarefa exclusiva da filosofia é construir linguagens 'formalizadas' nas quais fenômenos da ciência congelados artificialmente são expressos". Em sua avaliação, este procedimento é excessivamente lento em relação à velocidade de crescimento da ciência que descarta o sistema de linguagem anterior e não pode ser por ele restrito como uma "prisão conceitual".

A velocidade das mudanças na linguagem deveria, então, acompanhar a velocidade do progresso científico, com conceitos mais robustos que acompanhem as provas empreendidas. Os termos envolvidos na conjectura, após uma etapa do método de provas e refutações, podem já não mais ter o mesmo significado que anteriormente se lhes atribuía.

Citando Pólya, toma exemplos da física e da medicina, dizendo que nas primeira ocorrências de termos como "eletricidade" ou "contágio", as ideias associadas eram vagas e obscuras, mas com o advento de investigações, experimentos e reflexões , tornaram-se cada vez mais elaboradas.

Sobre o uso da mesma palavra para denotar uma ideia diferente e possivelmente mais sofisticada, Lakatos não reconhece uma evolução ou esclarecimento de conceitos. Sua concepção é mais radical: o significado ingênuo inicial desapareceu e foi substituído por um significado totalmente novo.

Lakatos afirma que mesmo que os novos conceitos ainda não sejam aceitos de forma geral, para a garantia do progresso, é necessário que os conceitos ingênuos ainda presentes na linguagem sejam substituídos pelos conceitos teóricos que foram purgados pelas provas e refutações.

Admitindo esta dinâmica dos conceitos, a questão colocada é: existe um limite para este crescimento do conteúdo e das teorias? Supondo que a resposta seja afirmativa, seria possível chegar a novas e mais profundas ideias de prova com maior poder de explicação e, ao final, à prova definitiva isenta de refutações por anomalias.

Lakatos, todavia, indica que a possibilidade de uma única teoria unificada para explicar todos os fenômenos não condiz com toda a defesa que já foi feita do falseabilismo. Além disso, outro argumento contrário à possibilidade de se obter a ampliação definitiva dos conceitos é a subjetividade presente na decisão de quando se deve parar.

2.4.12 COMO A CRÍTICA PODE TORNAR VERDADE MATEMÁTICA EM VERDADE LÓGICA

A seção final de Proofs and Refutations complementa a anterior, acrescentando à formação de conceitos a questão da verdade matemática, que Lakatos admite ser distinta, dependendo da intenção de quem a interpreta.

Para cada proposição, há uma interpretação suficientemente restrita que a torne verdadeira e uma interpretação suficientemente ampla que a torne falsa. A primeira pode ser chamada de dogmatista, verificacionista ou justificacionista e a segunda, cética, crítica ou refutacionista.

No decorrer do debate, o conceito de poliedro foi ampliado, mas depois descartado. Como assinalado na seção anterior, o conceito ingênuo poliedro passa a ser dispensável em uma formulação aperfeiçoada do teorema.

Outros termos teóricos que passaram a ser considerados (por exemplo, o conceito de faces simplesmente conexas) deveriam passar pelo mesmo processo de aprimoramento dedicado ao termo *poliedro*, chegando a um ciclo infinito de refutar cada termo e cada teorema, substituindo-os por suas versões mais rigorosas. O último teorema enunciado não é o teorema definitivo, mas unicamente aquele cuja falsidade ainda não foi exposta. Nunca se escapa da falsidade.

Mesmo que se adote um ponto de parada como se fosse o teorema definitivo, a forma linguística em que essa verdade está expressa deverá fazer uso da estratégia de impedimento de monstros para rejeitar os contraexemplos gerados pela ampliação dos conceitos.

Novo ciclo infinito se estabelece no âmbito da linguagem, pois cada forma linguística particular que não se mostre suficiente deve ser acrescida de definições mais e mais rigorosas, definições essas que também não são definitivas, mas são aquelas cuja imprecisão ainda não foi exposta. Nunca se escapa da imprecisão.

A interpretação crítica, por sua vez, adota uma postura que não considera a imprecisão um preço muito alto a ser pago pelo crescimento de conteúdo no processo heurístico.

Sobre a possibilidade de sempre refutar um lema ou rever um conceito, visando o crescimento do conteúdo, Lakatos apresenta um exemplo radical, extraído da obra *L'aspect moderne des mathématiques* (FELIX, 1957), cujo primeiro capítulo é denominado "o escândalo na matemática" e encontra-se reescrito no diálogo entre os alunos Gama e Kapa:

> GAMA: […] Em qualquer situação, devo sempre tornar minhas definições cada vez mais claras. Por que não deveria chegar a um ponto em que os significados dos termos serão tão cristalinos e claros que haverá apenas uma única interpretação, como é o caso de 2+2=4? Não há nada flexível sobre o significado desses termos e não há nada refutável sobre a verdade desta proposição, que reluz para sempre na luz natural da razão.
> KAPA: Em alguns casos, dois e dois perfazem cinco. Suponha que se encomende dois itens, cada um pesando duas libras e eles forem entregues em uma caixa pesando uma libra; então, nesta embalagem, duas libras e duas libras fazem cinco libras! (LAKATOS, 1977, p. 102)

Contra a reclamação de que efetivamente foram somados três pesos surge o argumento de que pode ser feita uma ampliação do conceito de adição. O conceito ingênuo de adição considerava um recipiente sem peso, já a conjectura aperfeiçoada deveria ser "$2 + 2 = 4$" em um recipiente sem peso.

Com base nessa interpretação, toda a história da Álgebra, da definição das operações e da linguagem associada pode ser vista como uma série de ampliações de provas e conceitos.

Lakatos descarta a possibilidade de se atingir conceitos exatos e inextensíveis e afirma a preferência por uma Matemática que seja significativa, mesmo abrindo mão da certeza plena, já que a alternativa de se obter total certeza ocorreria em detrimento da plenitude de significado.

Uma alternativa intermediária é mencionada por Lakatos (1977, p. 103), com referência a Bolzano (1837) e Tarski (1935), e pode ser vista como um refutacionismo moderado ou como um dogmatismo parcial, assim enunciada: "se uma proposição não pode ser refutada no que diz respeito a seus constituintes a, b, ..., então é logicamente verdadeira acerca desses constituintes."

Acompanhando sua herança popperiana, esta alternativa tem similaridade com o entendimento da "corroboração com respeito a algum sistema de enunciados básicos":

> Não é uso comum dizer que um enunciado foi perfeitamente verdadeiro ontem mas que hoje se tornou falso. Se ontem consideramos como verdadeiro um enunciado que hoje consideramos falso, estamos implicitamente asseverando, agora, que *ontem estávamos enganados*, que o enunciado, ontem, era falso – intemporalmente falso – mas que, erroneamente, o "tomamos por verdadeiro".
> Entretanto, nunca poderemos dizer que um enunciado, como tal, está, por si mesmo, "corroborado" (no sentido em que podemos dizer que ele é "verdadeiro"). Só podemos dizer que está *corroborado com respeito a algum sistema de enunciados básicos* – sistema aceito até um determinado ponto no tempo. "A corroboração que uma teoria recebeu até ontem" *não é logicamente idêntica* à "corroboração que uma teoria recebeu até hoje". Por isso, devemos colocar um indicador, por assim dizer, em cada apreciação de corroboração – indicador que caracterize o sistema de enunciados básicos a que a corroboração se associe (por exemplo a data de sua aceitação). (POPPER, 2008, p. 302)

O programa lakatosiano pretende manter a avaliação do progresso das teorias matemáticas nas circunscrições em que sua verdade é reconhecida (respeitando seus constituintes), mas não chega a deixar claro qual seria a metodologia para julgar esta evolução.

Apesar de perguntas não respondidas e da efervescência do debate, o Professor encerra a aula (isto é, Lakatos termina o texto) com uma apologia à sua abordagem da Matemática: "Esta revolução na crítica matemática mudou o conceito de verdade matemática, mudou os padrões de provas matemáticas, mudou os padrões da evolução da Matemática." (LAKATOS, 1977, pp 104-5)

Respeitando seu próprio método, que não deve ser dogmático, mas sempre admitir uma nova refutação, afirma que “nada ficou estabelecido” e que “uma investigação científica começa e termina com problemas”.

Reconhecemos que o método de Lakatos e sua visão a respeito da Matemática proporcionam um ambiente fértil de reflexões e que as múltiplas ideias que o influenciaram e suas propostas igualmente complexas tornam difícil até mesmo a tentativa de classificá-lo como um adepto desta ou daquela escola filosófica e parece ser mais adequado perceber Lakatos como um elemento único na Filosofia da Matemática.

3 QUESTÕES FILOSÓFICAS DE *PROOFS AND REFUTATIONS*

Encerrada esta apresentação de trechos e características da obra de Lakatos, dedicamos as próximas seções às questões filosóficas - importantes especialmente para a Matemática - salientadas pelo autor. O tema que nos parece ser o fio condutor da abordagem lakatosiana é o papel da heurística no processo de desenvolvimento da ciência.

Os elementos de uma lógica da descoberta que Popper havia decidido não levar em consideração por pertencer ao domínio da psicologia humana são básicos na interpretação das provas e refutações de Lakatos e permitem avaliar o progresso de uma conjectura.

Como estratégia de organização do texto, elaboramos uma revisão de temas selecionados como mais relevantes para o presente estudo, fazendo um percurso que parte das últimas seções de P&R em direção a seu início e, com isso, contemplando primeiro as questões mais gerais para depois atingir as mais específicas.

Quais seriam, portanto, as questões mais amplas abordadas por Lakatos em seu texto? As últimas seções tratam da verdade matemática e da formação de conceitos; um pouco antes, o debate discorria sobre o incremento de conteúdo e sobre o rigor matemático e, logo no início do texto, o assunto eram as estratégias utilizadas pelos matemáticos ao longo dos séculos para lidar com as demonstrações de teoremas quando do surgimento de contraexemplos que os refutassem.

Na trajetória escolhida, partiremos de uma pergunta filosófica fundamental: “o que é a verdade?”, restrita, porém, ao âmbito da Matemática, mesmo cientes de que isso ainda é um vasto domínio. A indagação sobre a verdade matemática vai encontrar respostas distintas dependendo da escola que a pretenda responder. Buscaremos mostrar qual é a linha mais adequada à proposta de Lakatos.

Após investigar a verdade matemática, associada à explicação oferecida surgem as questões sobre os conceitos em um sistema que deve, a partir de uma linguagem suficientemente estabelecida, permitir a comunicação entre os membros de uma comunidade que estuda o mesmo ente matemático.

Os significados dos termos utilizados nas demonstrações matemáticas sofrem modificações. Qual o papel da heurística nesse processo e quais as implicações para a ampliação do conteúdo de uma teoria? Como determinar – se isso for possível – os limites de aumento do domínio de validade de uma conjectura? Qual o nível de rigor que deve ser exigido das provas e demonstrações, ou mais amplamente, da própria linguagem usada para falar de Matemática?

Finalmente chegamos ao objeto que foi o ponto de partida do debate dos personagens da sala de aula de Lakatos: a conjectura de Euler-Descartes sobre poliedros com o experimento mental de Cauchy. Discutiremos então as estratégias para lidar com os contraexemplos e as características de análise e síntese presentes no método de provas e refutações.

3.1 A QUESTÃO DA VERDADE NA MATEMÁTICA

> O estudo sobre a verdade é, de certo modo, difícil, mas, de certo modo, fácil. Sinal disso é que ninguém consegue alcançá-la de maneira significativa, embora todos, em conjunto, não falhem por completo, pois cada um diz algo sobre o assunto, isto é, por cada um, nenhuma ou pouca contribuição se lhe acrescenta, mas, congregando-se todos, surge algo de certa monta. (Metaf., B, 993a 30)

Como definir a verdade no escopo da Matemática? Lakatos oferece, talvez de uma maneira um tanto agressiva, duas alternativas para lidar com a questão da verdade de uma proposição matemática: ou se tem um contexto dogmático axiomático que torna a sentença verdadeira, ou se decide por um ambiente crítico que a pode tornar falsa.

Para descrever o cenário em que se situava o filósofo húngaro quando sugere esta bifurcação na filosofia da Matemática, é válida uma revisão histórica que recorde as ideias dos gregos do período clássico e que avalie as ocorrências das revoluções intelectuais dos últimos quatro séculos.

Em sua obra *Mathematics: the loss of certainty*, o historiador de matemática Morris Kline (1908-1992) observa que desde as primeiras investidas daquilo que viria a ser classificado como filosofia, isto é, a ação humana de questionar e explicar o mundo, a Matemática já se encontra entrelaçada e se vale dos princípios lógicos que começavam a ser estabelecidos.

Nos próximos parágrafos, o enfoque está na identificação de alguns modelos de verdade que nortearam as atividades dos matemáticos e filósofos: o modelo euclidiano, o kantiano e aqueles propostos pelas escolas do século XX.

3.1.1 DOS PITAGÓRICOS AO PERÍODO HELENÍSTICO

Especialmente nos registros dos membros da escola pitagórica (século V a.C.), guiados pelo lema "tudo são números", os elementos aritméticos ou geométricos são o objeto de interesse para se compreender toda a Natureza e suas regras de funcionamento. Encontrar a verdade era, portanto, para os pitagóricos, compreender as regularidades e propriedades numéricas. Aristóteles, na Metafísica, diz:

> [O]s chamados pitagóricos, sendo os primeiros a se aplicar nas matemáticas, as desenvolveram e, nutrindo-se nelas, julgaram que seus princípios seriam princípios de todos os entes. Dado que, em tal domínio, os números são por natureza os primeiros, e dado que julgaram observar neles muitas semelhanças com as coisas que são e vêm a ser, [...] e, além disso, vendo que as características e as razões das escalas musicais davam-se em números – dado que todas as demais coisas mostravam-se similares aos números em sua inteira natureza, e que os números eram os itens primeiros de toda natureza, conceberam que os elementos dos números eram elementos de todos os entes, e conceberam que o céu em seu todo era escala musical e número. E todas as concordâncias que viam nos números e nas escalas em relação às características e partes do céu, e em relação a sua inteira ordenação, reuniram-nas e aplicaram-nas em seu todo. Se algo porventura faltasse, ansiavam por manter sua proposta coerente. (Metaf. 985b 23)

A maior preocupação dos pitagóricos, como de vários que os precederam, era a explicação das causas de todas as coisas e de suas propriedades; os números eram, assim, a própria verdade e não somente um instrumento para alcançá-la.

Esta ênfase dada à matemática pelos pitagóricos garantiu a Platão e seus seguidores uma herança de vários teoremas e estudos que constituíram um acervo intelectual básico para as discussões sobre conhecimento, dando suporte para que os platônicos estabelecessem suas concepções sobre os entes matemáticos de forma mais sistematizada.

Para Platão, o mundo só pode ser explicado e compreendido por vias matemáticas; não uma matemática qualquer e sim aquela do mundo ideal em que residem os elementos eternos. A mera sugestão de que a matemática poderia ser estudada ou explicada com objetos imperfeitos e perecíveis era firmemente rejeitada.

Sem desprezar o desenvolvimento matemático de outras civilizações no período clássico, é inegável que os estudos dos gregos antigos permitiram um alicerce para as várias tentativas de estabelecer a Matemática como fundamento seguro da razão humana.

Não causa estranheza, portanto, que os Elementos, de Euclides, obra mais célebre da história da matemática e a primeira na civilização ocidental que reuniu de forma sistemática os conhecimentos na área, tenham sido compilados nesta época (século III a.C.).

O primeiro livro dos Elementos introduz quinze afirmações com o objetivo de estabelecer a base sobre a qual são construídas as demonstrações das proposições posteriores, sendo nove de caráter geral (algumas redundantes) e seis associadas explicitamente à Geometria.

> Pede-se como coisa possível, que se trace de um ponto qualquer para outro qualquer ponto uma linha reta.
> E que uma linha reta determinada se estenda sobre si mesma, até onde seja necessário.
> E que com qualquer centro e qualquer distância se descreva um círculo.
> As coisas que são iguais a uma terceira, são iguais entre si.
> Se a coisas iguais se juntarem outras iguais, os todos serão iguais.
> Se de coisas iguais se tirarem outras iguais, os restos serão iguais.
> Se a coisas desiguais se ajuntarem outras iguais, os todos serão desiguais.
> Se de coisas desiguais se tirarem coisas iguais, os restos serão desiguais.
> As quantidades, das quais cada uma por si faz o dobro de outra quantidade, são iguais.
> E aquelas, que são metades de uma mesma quantidade, são também iguais.
> Duas quantidades, que se ajustam perfeitamente uma com outra, são iguais.
> O todo é maior do que qualquer das suas partes.
> Duas linhas retas não compreendem espaço.
> Todos os ângulos retos são iguais.
> E se uma linha reta, cortando outras duas retas, forma, do mesmo lado, os ângulos internos cuja soma seja menor que dois ângulos retos, então essas duas retas, prolongadas indefinidamente, encontrar-se-ão no lado no qual a soma dos ângulos é menor que dois ângulos retos. (HEATH, 1925)

As qualidades compartilhadas por essas sentenças e que as caracterizam como um axioma (do grego ἀξίωμα, com raiz no verbo ἀξιόειν, que significa considerar valioso, considerar correto, e daí postular, exigir) são, de acordo com Aristóteles, a auto-evidência, a prioridade inferencial e a simplicidade[23].

O sistema axiomático estabelecido nos Elementos é, portanto, construído sobre um alicerce de afirmações cuja validade é inquestionável e para as quais nenhuma prova pode ser oferecida; a verdade de quaisquer demonstrações que têm esta base está garantida pela verdade indubitável dos axiomas.

---

[23] Foi percebido por vários matemáticos que o chamado "quinto postulado de Euclides" ou "postulado das paralelas" (o último da lista apresentada) não era tão simples nem auto-evidente como os demais postulados euclidianos e foram justamente os estudos a seu respeito que deflagraram o surgimento das geometrias não-euclidianas no século XVIII, como é mencionado a seguir nesta seção.

Eis aqui o cerne de uma *arquitetura de conhecimento* que será adotado por séculos no desenvolvimento da matemática e que trataremos aqui sob o nome de “euclidiano”. Este sistema permite ampliar um corpo de conhecimentos (episteme) gerado por uma base sólida e permeado por canais seguros de transmissão da verdade.

O raciocínio dedutivo é o fio condutor que parte dos axiomas e postulados e, sob regras lógicas bem estabelecidas, permite elaborar sentenças cada vez mais sofisticadas a respeito dos objetos considerados. A transmissão de verdade percorre todas as deduções, mas fica sempre atrelada à verdade dos princípios aceitos sem explicação.

Kline (1980, p. 20) salienta que, no ambiente permeado pelas tradições aristotélicas, as conclusões obtidas através de silogismos superaram, no desenvolvimento científico grego, outras estratégias como a indução ou a analogia. Por exemplo, o fato de se observar que centenas ou milhares de maçãs são vermelhas não garante que todas serão vermelhas e o fato de que o irmão de Pedro foi aprovado no vestibular não garante que ele também será.

O raciocínio dedutivo, por outro lado, não deixa brechas para dúvidas, quando se afirma, por exemplo, que todo homem é mortal, Sócrates é homem e, consequentemente, Sócrates é mortal. Um sistema pautado em afirmações inegáveis não poderia desejar nada menos que conclusões expressando verdades.

Além do canal de propagação de verdade garantido pelo encadeamento de sentenças derivadas de afirmações asseguradas anteriormente, o outro ponto crucial do modelo de verdade euclidiano está na axiomatização.

Para justificar a existência dessas afirmações autoevidentes e inquestionáveis, Platão recorre ao conceito de *anamnese*, isto é, um processo de recordação de um saber que já existia antes do nascimento. A aceitação da validade dos axiomas matemáticos mais genéricos como “duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si” ou mais aplicados à geometria como “dois pontos definem uma única reta” não causa incômodo porque, segundo Platão, são conhecimentos que todos já possuem e o aprendizado apenas faz com que se lembrem destes e de outros saberes universais.

Aristóteles, nos Segundos Analíticos, descreve de forma bastante detalhada a questão das verdades primeiras e de seu papel no raciocínio dedutivo:

> Julgamos conhecer cientificamente cada coisa, de modo absoluto, e não, à maneira sofística, por acidente, quando julgamos conhecer a causa pela qual a coisa é, que ela é a sua causa e que não pode essa coisa ser de outra maneira. [...] Assim, se o conhecer cientificamente é como propusemos, é necessário que o conhecimento demonstrativo provenha de itens verdadeiros, primeiros, imediatos, mais cognoscíveis que a conclusão, anteriores a ela e que sejam causas dela. (Segundos Analíticos, 71b 9, 71b 19)

Há, porém, uma discordância de Aristóteles em relação a seu mestre, no que se refere à essência e substância dos entes matemáticos. Cattanei (2005) trata de forma exaustiva sobre a questão da "fisionomia" dos objetos matemáticos, isto é, "se os objetos matemáticos necessariamente existem, ou deverão existir nas coisas sensíveis [...], ou separado delas [...] e, se não existem em nenhum desses dois modos, ou não existem de modo algum, ou existem de outro modo ainda diferente". (Metaf. M 1, 1076 a 26)

No percurso argumentativo de Aristóteles, primeiro é assumida a necessária existência dos objetos matemáticos tais como número ou triângulo para, em seguida avaliar se eles são materiais ou imateriais, sensíveis ou suprassensíveis.

A primeira alternativa (objetos matemáticos materiais e sensíveis) é descartada, pois, apesar de ser possível traçar linhas sensíveis em um quadro ou de se construir um triângulo de bronze, ainda assim, "as linhas sensíveis não são como as entende o geômetra: com efeito, nenhuma das coisas sensíveis é reta ou curva como quer o geômetra." (Metaf. B 2, 997 b 35 – 998 a 4) ; a segunda hipótese (objetos matemáticos são totalmente separados do mundo sensível) é rejeitada pela própria ação cotidiana que reconhece números e triângulos associados a seres materiais e corruptíveis.

Vencida a primeira questão, restam outras duas possibilidades: a não existência ou a existência de "outro modo". Para Aristóteles, de acordo com Cattanei, a existência é garantida, pois

> Nenhuma ciência escapa à regra segundo a qual "é justamente por saber que um objeto existe que nós procuramos por que ele existe." As ciências particulares [...] são obrigadas a pressupor o ser do próprio objeto; caso contrário elas mesmas não existiriam, "pois não é possível conhecer o que não existe". Mas as matemáticas existem, e são ciências; portanto o objeto delas existe. (CATTANEI, 2005, p. 183)

A alternativa restante é a necessária existência, porém, ainda que se assuma que a justificação das ciências matemáticas deva ser buscada fora das mesmas, isto é, na Filosofia, a proposta é que isso seja feito de forma menos exagerada. Ao invés de ter os entes matemáticos já dados per se, Aristóteles diz que "o matemático estuda os objetos obtidos por subtração[24]" (Fis. 248b 19-21).

Portanto, a separação das propriedades comuns de todos os triângulos particulares leva à noção de triângulo e isto é bem menos exigente que a separação ontológica entre realidades sensível e suprassensível pensada por Platão.

O modo de ser dos entes matemáticos pode ser investigado, sugere Cattanei, "a partir da praxe habitual dos matemáticos". Os objetos são "tais quais os nomeiam os matemáticos" e são identificados por possuírem as características necessárias para as operações que se pretendem realizar.

Mesmo quando volta sua atenção não para objetos particulares, como número ou figuras geométricas, mas trata de postulados gerais, isto é, dos axiomas, Aristóteles mantém sua tese:

> Como as proposições universais das matemáticas não se referem a entes separados e existentes à parte das grandezas e dos números, mas se referem justamente a eles [...] é evidente que poderão existir também raciocínios e demonstrações que se referem às grandezas sensíveis, porém não consideradas enquanto sensíveis, mas enquanto dotadas de determinadas propriedades. (Metaf. M 1077 b 17-22)

Reforçando e validando a verdade das ciências, Aristóteles identifica que, na multiplicidade de ciências matemáticas, raciocínios distintos poderiam ser empreendidos dependendo das propriedades de interesse; por exemplo dos corpos em movimento ou estáticos, dos corpos sólidos ou das superfícies, das figuras ou das quantidades. "O ser [matemático], de fato, tem muito significados." (Metaf. M, 1077 b 17)

Com base nesse alicerce aristotélico, no período helenístico (séc. III a.C – séc. IV d.C.) são relevantes as produções de matemáticos como Ptolomeu, Arquimedes, Erastóstenes e Herão. As teorias por eles formuladas nas ciências da Astronomia, Mecânica, Geografia e Ótica foram frutos de uma Matemática que passava a ocupar um lugar de primazia na produção intelectual desenvolvida principalmente na cidade de Alexandria.

---

[24] Para Cattanei (2005) a subtração (termo às vezes traduzido como abstração) é um processo puramente lógico pelo qual o matemático obtém uma noção mais simples de uma mais complexa, sem, no entanto, criar uma relação de dependência causal.

Os temas estudados diziam respeito ao movimento dos corpos celestes, à ação de alavancas, ao traçado de mapas e à construção de espelhos. As possíveis aplicações das proposições matemáticas, ainda que mantivessem o cuidadoso uso da geometria com todos os avanços já obtidos, permitiam aos matemáticos alexandrinos observar a Natureza. Kline (1980, p. 24) diz que "era claro para os gregos que os princípios geométricos estavam incorporados na estrutura total do universo. Assim, o estudo do espaço e das figuras era uma contribuição essencial para a investigação da natureza."

A matemática, nascida como um reduto de verdades logicamente organizadas passa a ser também a estrutura almejada para a compreensão do mundo físico. O objetivo primordial dos mais eminentes filósofos dos séculos posteriores foi desvelar matematicamente o funcionamento da natureza.

3.1.2 O ILUMINISMO E O MODELO KANTIANO

O modelo euclidiano se manteve durante o período da Idade Média e a questão da verdade matemática esteve inserida na concepção de que o mundo é matematicamente projetado, sendo Deus o responsável por tal projeto, em uma visão que sincretizava o criador da cultura judaico-cristã com o Demiurgo platônico.

São Tomás de Aquino, escrevendo no século XIII sobre a criação do mundo, diz que a "criação é operação própria de Deus" e, em outro trecho, apresenta a seguinte analogia: "a forma da coisa a ser feita preexiste segundo o ser inteligível, como nos que agem pelo intelecto, é o caso da semelhança da casa na mente do arquiteto."

No Timeu, Platão descreve a criação do mundo como a ordenação dos elementos disformes tendo um modelo ideal perfeito e um processo de composição baseado em formas e regras matemáticas:

> Deste modo, o demiurgo põe os olhos no que é imutável e que utiliza como arquétipo, quando dá a forma e as propriedades ao que cria. É inevitável que tudo aquilo que perfaz deste modo seja belo. Na verdade, antes de isto acontecer, todos os elementos estavam privados de proporção e de medida [...] A partir deste modo e desta condição, começaram a ser configurados através de formas e de números. (Timeu 28a; 53 b)

Dessa forma, o estudo e o desenvolvimento da matemática na Idade média europeia acabaram por se tornar um elemento de ascese tendo como finalidade a busca e maior aproximação possível do homem às coisas celestiais.

Esta “metodologia” se faz presente nos trabalhos de eminentes matemáticos, como Kepler, Galileu, Descartes e Newton. Por exemplo, na obra *Harmonices mundi* (A Harmonia do mundo), publicada por Kepler em 1619, o movimento dos planetas é estudado a partir das regularidades geométricas de figuras planas e sólidas e das razões de quantidades inteiras.

Apesar dos conflitos enfrentados por Galileu em relação ao valor que pretendia dar aos seus experimentos como fonte de conhecimento, sua obra também tem a premissa de que, usando os recursos do intelecto, o mundo pode ser interpretado pela matemática. A esse respeito, é célebre sua afirmação:

> A filosofia (isto é, a ciência) está escrita neste grandíssimo livro que, continuamente, está aberto diante de nossos olhos (eu quero dizer o universo), mas que não se pode entender se não se aprende a entender a língua, e a conhecer os caracteres, nos quais está escrito. Ele é escrito em língua matemática, e os caracteres são os triângulos, círculos, e outras figuras geométricas, sem cujos meios é humanamente impossível entender uma só palavra. (GALILEI, 1978)

Uma proposta semelhante se encontra em Descartes quando afirma em suas Meditações que considerava como as mais certas “as verdades que concebia clara e distintamente no que diz respeito às figuras, aos números e às outras coisas que pertencem à Aritmética e à Geometria” e que a Matemática fora sua inspiração ao propor o método para bem conduzir a razão, como relata em seu Discurso:

> Esses longos encadeamentos de razões simples e fáceis, que os geômetras têm o hábito de utilizar para chegar a suas mais difíceis demonstrações, tinham-me dado a oportunidade de imaginar que todas as coisas que caem no conhecimento dos homens se sucedem da mesma maneira [...] entre todos aqueles que até agora pesquisaram a verdade nas ciências, somente os matemáticos puderam encontrar algumas demonstrações, isto é, algumas razões certas e evidentes. (DESCARTES, 2002, pp. 90-1)

Apesar de ser um movimento que se posicionava contra os dogmas da igreja, o Iluminismo não retirou a Matemática de seu lugar de destaque nem alterou a percepção de que as leis da natureza eram leis matemáticas e, na *Encyclopédie*, editada por Diderot e d’Alembert, a Matemática é descrita como “a ciência por excelência” da qual derivam várias das ciências naturais, iluminadas pela razão.

Os editores, influenciados pelas ideias de Francis Bacon, reconhecem, no entanto, que, na amplitude dos possíveis objetos de estudo da Matemática, há trechos que ainda não possuem a iluminação plena.

> É preciso mesmo confessar que, como todas as partes da Matemática não possuem um objeto igualmente simples, a certeza propriamente dita, baseada em princípios necessariamente verdadeiros e evidentes por si próprios, também não pertence igualmente ou da mesma maneira a todas essas partes. Várias delas, apoiadas em princípios físicos, isto é, em verdades de experiência ou em simples hipóteses, não têm, por assim dizer, senão uma certeza de experiência ou mesmo de pura suposição. (DIDEROT; D'ALEMBERT, 2017)

Os iluministas não pretendiam descartar a validade do conjunto de saberes moldado a partir da estrutura euclidiana e admitiam que a Geometria ainda se mantinha como o modelo da exatidão. Mas os estudos de matemáticos como Fourier, Gauss e Cauchy não se restringiam somente ao estudo de números e formas geométricas; em uma classificação atual diríamos que sua atenção se voltava para temas de termodinâmica, eletromagnetismo, topografia e engenharia.

Estes trabalhos voltados para as "matemáticas mistas", como chamadas na Encyclopédie, faziam uso de informações obtidas da observação do mundo como fonte para a elaboração de hipóteses escritas em termos matemáticos. David Hume, em seu *Treatise of Human Nature* (1739-40), postulou, então, que não se pode tomar como certo nenhum conhecimento a não ser o adquirido por sensações imediatas. A crença em um mundo físico regido por leis matemáticas eternas e invioláveis é incabível após considerar a causalidade como mero hábito mental e não como princípio científico.

Se as verdades das ciências naturais não são confiáveis, o que dizer da Geometria, reduto de noções abstratas, construído sobre axiomas e processos dedutivos. Kline comenta que

> Hume não rejeita os axiomas, mas opta por esvaziá-los, bem como os resultados obtidos por dedução. Assim como os axiomas, eles partem de sensações sobre o pretenso mundo físico. Os teoremas são realmente consequências necessárias dos axiomas, mas não são mais que elaboradas repetições dos axiomas. (KLINE, 1980, p. 75)

Para Hume, a garantia de verdade no mundo físico não pode ser apoiada nos axiomas ou teoremas matemáticos. As ideias do filósofo inglês logo se tornaram difundidas, sendo causa de grande incômodo para aqueles que consideravam que as leis desveladas a partir do processo dedutivo, isto é, pelo método euclidiano, eram seguras.

Ninguém menos que Immanuel Kant tomou para si a responsabilidade de solucionar os problemas colocados por Hume e garantir um sustento racional para as ciências que fosse compatível com os proveitosos resultados que já haviam sido obtidos pelo filósofo inglês, pois como ele mesmo diz: "[o] meu próprio trabalho, na Crítica da Razão Pura, foi ocasionado pelos pontos de vista céticos de Hume." (Kant, Crítica à razão prática, 1956, p. 54)

A resposta kantiana tem o propósito de explicar em que se sustentam o conhecimento das ciências (especialmente a Física e a Matemática) e, consequentemente, os resultados prático já alcançados até sua época. Para Kant, o conhecimento de algo só se dá quando é possível formular a respeito deste algo um juízo. Assim, não se pode dizer que se conhece algo simplesmente pela sensibilidade; é necessário o uso das faculdades mentais, mediadas pelos conceitos, para a formulação dos juízos, pois "o entendimento não pode perceber e os sentidos não podem pensar coisa alguma. Somente quando se unem, resulta o conhecimento".

Os juízos têm a forma sujeito-predicado e são classificados em *a posteriori*, se dependem da intuição empírica (sensação) e *a priori*, se não dependem da intuição empírica, partindo, por exemplo, das intuições puras (espaço e tempo). Outra classificação distingue os juízos sintéticos dos analíticos: um juízo sintético é aquele que acrescenta uma informação ao sujeito não dada anteriormente, enquanto um juízo analítico apenas explicita uma propriedade já existente.

São exemplos de juízos analíticos dizer "um triângulo é um polígono" ou "um triângulo tem três lados", visto que nenhuma informação nova foi acrescida ao conceito de triângulo que já não fosse parte de sua definição. O outro caso, isto é, um juízo sintético, seria a afirmação "um triângulo têm ângulos internos cuja soma é igual a dois ângulos retos", já que se trata de uma ampliação do conceito.

Este último exemplo seria classificado como um juízo sintético *a priori*, enquanto o outro caso de juízo sintético é aquele validado pela intuição empírica, que seria algo como "este triângulo é azul". Claramente, os juízos sintéticos *a priori* têm uma característica de universalidade não encontrada nos juízos sintéticos *a posteriori* e, considerando a índole das proposições matemáticas, Kant procura defender que os juízos sintéticos *a priori* são possíveis justamente para dar sustento à sua concepção de que a Matemática (geometria e aritmética) é construída com base em tais juízos.

Shabel (2007) considera que um ponto importante da filosofia da matemática de Kant encontra-se justamente na distinção apresentada a respeito dos métodos da filosofia e os da matemática: “A cognição filosófica é cognição racional a partir de conceitos, a cognição matemática é a cognição a partir da construção de conceitos.”

Esta importante característica da matemática, isto é, o fato de construir seus conceitos, é destacada por Kant que diz que “a chave para a demonstração matemática está na habilidade que o matemático tem de produzir figuras pela construção de acordo com conceitos *a priori*.” (B xii) e que “construir um conceito significa exibir a intuição pura correspondente a ele”. (A713).

No exemplo oferecido por Shabel (2007, p. 99), a definição de triângulo contempla a possibilidade de construir uma figura plana com três lados retilíneos. Esta construção é empreendida em um processo de “síntese arbitrária” que reúne os conceitos de figura, linha reta e três.

A base para avaliação das proposições matemática está, para Kant, justamente no fato de que todo juízo matemático é sintético e isto se dá porque eles “codificam e descrevem o conteúdo de nossas representações originais *a priori* de espaço e tempo que são apresentadas na intuição e não por meros conceitos.” (SHABEL, 2007, p.107)

Tomando o clássico exemplo aritmético, Kant oferece um desafio para quem quiser tentar contrariá-lo mostrando que a expressão “$5+7=12$” é um caso de juízo analítico, isto é, que já há, previamente, nos conceitos de “5”, “7” ou de “soma” o conceito de “12”. A recusa é apoiada pelo argumento de que o conceito de “12”, que dá sustento para quem quiser verificar se “$5+7=12$” é verdadeiro ou falso, é construído em um processo de síntese arbitrária assim como ocorrido com o caso geométrico[25].

Além de argumentar sobre a sinteticidade dos juízos matemáticos, Kant é enfático em defini-los como apriorísticos, rejeitando a possibilidade de que os conceitos e teoremas matemáticos fossem validados pela experiência sensorial.

Recusando a alternativa de serem construídos com base no acúmulo de observações singulares, salienta-se a característica de universalidade e

[25] A diferença das proposições geométricas reside na percepção de que, naqueles casos, a intuição pura considerada é a espacial.

generalização que se pretende para os conceitos matemáticos. O conceito de “triângulo” ou de “12” não se restringem a particulares, mas tratam de representações universais.

Este esquema dá conta de uma questão epistemológica básica: “Que os conceitos matemáticos possam ser sinteticamente definidos e construídos torna possível para nós termos acesso cognitivo direto aos padrões matemáticos gerais.” (SHABEL, 2007, p. 110)

O ato mental de construção de conceitos matemáticos está atrelado às faculdades cognitivas superiores de imaginação e compreensão que são atos voluntátios mentais e não percepções dos sentidos. Na visão de Kant, é esse modelo que garante à matemática ser o terreno de certezas apodíticas, universalmente verdadeiras e aplicáveis a todo objeto espaço-temporal da experiência.

É praticamente redundante enfatizar a influência de Kant no desenvolvimento da filosofia (não só da matemática, mas em seus diversos ramos) após o século XVIII, mas, neste tema em especial, sua “revolução copernicana” se faz notar, pois foi realmente um marco na forma de conceber os modelos de verdade matemática. Enquanto seus adversários insistiam em fundar os princípios matemáticos em uma base ontológica supra sensória ou simplesmente recusavam ceticamente a mera possibilidade de se alcançar a certeza sobre as proposições, seus seguidores passaram a adotar a construção mental necessária e universal como sustento para a verdade matemática.

No entanto, na avaliação de Kline, a influência de Kant é simultaneamente libertadora e restritiva para os matemáticos que passaram a segui-la:

> Por enfatizar o poder da mente para organizar as experiências em um mundo que nunca conheceremos verdadeiramente, ele pavimentou o caminho para novas estruturas contrárias àquelas tão firmemente mantidas em sua época. Mas, por insistir que a mente necessariamente organiza sensações espaciais de acordo com as leis da geometria euclidiana, ele impediu a aceitação de qualquer visão contrária. (KLINE, 1980, p. 77)

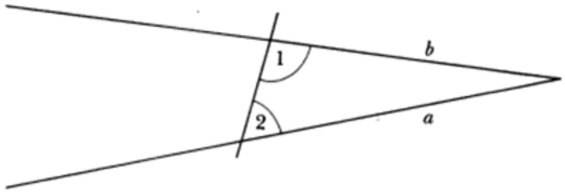
Esta afirmação está relacionada ao abalo causado em sua teoria pelo surgimento das geometrias não-euclidianas que, de um só golpe, agrediam os modelos de verdade euclidiano e kantiano.

3.1.3 O SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Apesar da firme convicção de Kant, as visões contrárias acabaram surgindo, demolindo a suposição de que somente se poderia enxergar o mundo pelas regras da geometria euclidiana. Este abalo ocorreu a partir da inquietação que o "postulado das paralelas" vinha causando ao longo dos séculos.

Na redação original, o célebre quinto postulado euclidiano diz: "caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos" (EUCLIDES, 2009 – tradução de Irineu Bicudo). No diagrama abaixo vemos a representação desta afirmação.

Figura 13 – Representação do "postulado das paralelas"



Fonte: KLINE, 1980.

Outra maneira de afirmar uma proposição equivalente, foi elaborada pelo matemático escocês John Playfair (1748-1819) da seguinte maneira: "dado, em um plano, uma reta e um ponto não pertencente a ela, no máximo uma reta paralela à reta dada pode ser traçada por esse ponto."

Um dos motivos pelos quais esta afirmação a respeito da propriedade do paralelismo de retas trazia incômodo aos geômetras era a complexidade da sentença que se diferenciava dos demais axiomas escritos de forma mais singela e intuitiva. Outro ponto conflituoso era que o axioma demandava a extensão das retas infinitamente destoando também dos outros postulados que possuíam uma representação possível em uma região limitada do plano.

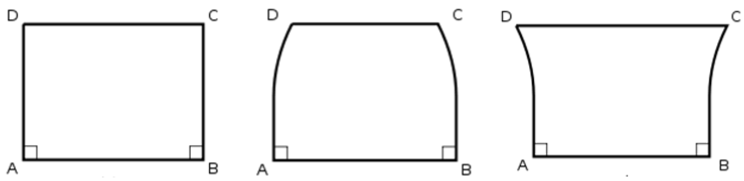
Com o desejo de aperfeiçoar o conjunto de axiomas, vários partiram da suposição de que esta proposição era, na verdade, um teorema passível de ser demonstrado dedutivamente a partir dos princípios mais elementares.

Demorou cerca de vinte séculos para que outra abordagem fosse empreendida; ao invés de considerar a afirmação válida e buscar sua demonstração, o matemático jesuíta Girolamo Saccheri (1667-1733) empreendeu uma estratégia inovadora.

Assumindo como garantida a validade apenas dos outros axiomas e postulados euclidianos, Saccheri passou a analisar a demonstração de diversos teoremas, suspeitando que, caso assumisse algo diferente do postulado das paralelas, encontraria incoerências que levariam à conclusão de que esse postulado era essencial para a estabilidade de todo o sistema dedutivo.

O experimento de Saccheri, publicado em 1733 em sua obra *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides justificado de toda falha), em linhas gerais é o seguinte: dado um quadrilátero ABCD, com os ângulos da base (A e B) retos, é possível provar que os ângulos do topo (C e D) são congruentes. As três possibilidades existentes, então são: os ângulos do topo são retos, agudos ou obtusos.

Figura 14 – Quadriláteros do experimento de Saccheri



Fonte: KLINE, 1980.

A hipótese dos ângulos retos nada mais é que a prova desejada do “quinto postulado” e a hipótese dos ângulos obtusos pode ser provada como contraditória. O problema enfrentado pelo religioso estava na hipótese dos ângulos agudos que não apresentava incoerência. Possivelmente em função de seu vínculo eclesial, acabou afirmando que este caso deveria ser rejeitado porque “é repugnante à natureza das retas.”

Apesar da recusa arbitrária de Saccheri, o caminho por ele aberto foi continuado por outros como Johann Lambert (1728-1777) e o professor de Gauss, Abraham Kästner (1719-1800). Coube, no entanto, a ousadia das primeiras propostas de outra geometria aos jovens Bolyai (1802-1860) e Lobachevsky (1793-1856).

Bolyai publicou, em 1830, suas conclusões em um apêndice de um livro de seu pai, Wolfgang, com estudos sobre o que chamou de geometria absoluta.

> Denote por Σ o sistema da geometria baseada na hipótese de que o Quinto Postulado de Euclides é verdadeiro, e por S o sistema baseado na hipótese oposta. Todos os teoremas que estabelecemos sem especificar explicitamente o sistema Σ ou S no qual o teorema é válido são ditos serem absolutos, isto é, válidos independentemente se Σ ou S são verdadeiros. (BOLYAI, apud O'CONNOR e ROBERTSON, 2004)

Partindo de fontes semelhantes, mas sem conhecimento do trabalho de Bolyai, o russo Lobachevsky publicou em 1829 sua obra sobre os fundamentos da geometria, em que apresenta praticamente os mesmo resultados.

Apesar de não haver produzido nenhum artigo em que sistematizasse essas ideias, é considerado que Gauss as considerava válidas, pois, em uma carta a Taurinus diz que

> O pressuposto de que a soma dos três ângulos de um triângulo é menor que 180° leva a uma geometria curiosa[26], bem diferente da nossa [isto é, da euclidiana] mas completamente consistente, que desenvolvi para a minha plena satisfação. Os teoremas desta geometria parecem ser paradoxais, e para o inexperiente, absurdos, mas uma reflexão firme e calma revela que eles não contêm nada que seja realmente impossível. (GAUSS, apud KLINE, 1980, p. 82)

Uma frase de uma carta do jovem Bolyai a seu pai em 1823 talvez sintetize a reação dos próprios criadores dessa geometria que afrontava a exclusividade da geometria euclidiana: "do nada eu criei um mundo novo e diferente".

O trabalho de cunho teórico desses geômetras começava a abalar as estruturas herdadas dos clássicos e fortalecidos pelos escolásticos e pelo racionalismo do século XVIII. A questão que se começava a levantar era: se a geometria euclidiana não é a única, o que dizer de todas as teorias que imprimiam ao mundo físico as regras desta geometria? Isso causa um incômodo à teoria kantiana, já que a intuição pura do espaço estabelece que a geometria do espaço real, estudado pelas ciências empíricas é a geometria euclidiana.

---

[26] A afirmação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$ é equivalente ao postulado euclidiano das paralelas.

3.1.4 OS NÚMEROS COMPLEXOS E AS ÁLGEBRAS "ESTRANHAS"

Os tremores causados nas verdades matemáticas na metade do século XIX pelas geometrias não euclidianas não são um caso único. Em outras áreas como a álgebra, os estudos a respeito dos números complexos já haviam trazido a necessidade de ajustes dos conceitos e da amplitude daquilo que poderia ser considerado válido na matemática.

Até o século XV, quando se obtinham raízes quadradas de números negativos como respostas na resolução de equações algébricas, estas eram desprezadas, por serem entendidas como impossíveis ou falsas. Graças ao trabalho de Rafael Bombelli (1526-1572), passando por Descartes, Euler e chegando até Gauss, esses números passaram a ser admitidos no ambiente da exatidão matemática.

Os números em questão são aqueles que podem ser escritos na forma $a + bi$, em que a e b pertencem ao conjunto dos números reais e i é o símbolo que indica a raiz quadrada de -1. Outra maneira de caracterizar a quantidade i é afirmar que este elemento é aquele que, multiplicado por si mesmo, resulta em -1.

A possibilidade da existência de um número com essa propriedade (ter seu quadrado igual a -1) é incompatível com a matemática desenvolvida até então, já que o quadrado de qualquer número x, fosse ele pertencente ao conjunto dos números inteiros, racionais ou reais, deveria ser sempre uma quantia positiva, afirmação facilmente percebida pela possibilidade de relacionar esta operação com o cálculo da área de uma região do plano delimitada por um quadrado cujo lado fosse igual ao número x em questão.

No entanto, apesar do incômodo inicial, foi construída uma estrutura lógica para as operações e funções com essas variáveis e, no início do século XIX já estavam bem definidas a adição, subtração e multiplicação de números complexos, entendidas em sua similaridade com a representação de vetores, elemento comum nos modelos da física.

Graças ao trabalho de matemáticos como Jean-Robert Argand (1786-1822) e Hermann Grassmann (1809-1877), a álgebra com vetores tinha sido desenvolvida com sucesso para elementos contidos no plano, isto é, para os números complexos.

O engenho e imaginação do matemático inglês Willian Hamilton (1805-1865) o levaram a uma ampliação dimensional criando os elementos chamados de quatérnions, que têm a seguinte definição: são escritos na forma $a + bi + cj + dk$, em que a, b, c e d são números reais e i, j e k compartilham da propriedade de ser a identidade imaginária, ou seja, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

O problema enfrentado por Hamilton para construir o conjunto de operações válidas para os quatérnions foi a propriedade da comutatividade na multiplicação. Em qualquer conjunto numérico estudado até então – números naturais, inteiros, reais ou complexos – sempre se verificava que dados dois elementos p e q, pertencentes ao mesmo conjunto, o produto tinha o mesmo resultado independente da ordem dos fatores ou, simbolicamente, $p \cdot q = q \cdot p$.

No caso dos quaternions, no entanto, esta propriedade não se verificava e a ordem dos fatores alterava o produto. A alternativa para garantir uma álgebra que não apresentasse falhas e possível de ser utilizada com os quaternions foi abdicar da propriedade conflituosa.

Esta nova álgebra não comutativa abriu caminho para a formulação de outras operações definidas de forma arbitrária, sem a preocupação de manter consonância com as operações de adição e multiplicação convencionais. Em uma avaliação contemporânea pode não parecer digna de nota a exclusão de uma ou outra propriedade de uma operação criada arbitrariamente, mas na metade do século XIX este foi outro golpe sofrido pela ciência que deveria ser composta de verdades bem estabelecidas, certas e eternas.

O saldo da criação das geometrias não euclidianas e das novas álgebras era uma sensação de incerteza inédita no desenvolvimento da Matemática. O século das luzes excluiu o argumento cristão da criação divina bem ordenada e colocou o homem e sua mente racional como garantia das ciências.

Porém, se a mente pode admitir este ou aquele conjunto de regras matemáticas (geométricas ou algébricas) para compreender e descrever o mundo, qual delas é “a verdade”? Kline (1980, p. 99) diz que a “confiança de que a verdade seria descoberta em todas as áreas foi despedaçada pelo reconhecimento de que não há verdade na Matemática”.

Todavia, os matemáticos não se deram por derrotados e um movimento anteriormente esboçado ganhou força ao longo dos séculos XIX e XX: a definição rigorosa dos fundamentos da Matemática.

A busca pelo rigor no cálculo, que acabou gerando a análise matemática, já havia sido capitaneada por Cauchy e Weierstrass, com a finalidade de esclarecer todos os elementos necessários para o bom funcionamento das operações de diferenciação e integração tais como criadas por Newton e Leibniz.

Mas, após os abalos sofridos, a necessidade de precisão nas definições de todos os elementos e propriedades básicos fomentou os trabalhos de Frege (1848-1925), Russel (1872-1970) e Hilbert (1862-1943), apenas para citar alguns dos expoentes.

3.1.5 LOGICISMO E INTUICIONISMO

Uma das propostas de remédio para a crise da verdade matemática foi estabelecer seu fundamento na Lógica. A lógica aristotélica, fundada no Organon no século III a. C., já vinha sendo empregada por cerca de dois milênios; mas foi com Descartes que houve a proposta de elevá-la ao patamar de "instrumento mais poderoso para o conhecimento do que qualquer outro legado pela ação humana e fonte de todos os outros".

Leibniz, um passo adiante, diz que a lógica deve desempenhar um papel múltiplo, de *characteristica universalis* – uma linguagem científica universal aplicável a qualquer verdade derivada pelo raciocínio; de *calculus ratiocinator* – uma coleção de maneiras de efetuar deduções a partir de princípios; e de *ars combinatoria* – uma coleção de conceitos básicos, um alfabeto de símbolos que permitisse a expressão e o tratamento de qualquer ideia concebível.

No início do século XIX, alguns matemáticos como George Boole (1815-1864) e Augustus de Morgan (1806-1871) empreenderam tentativas de desenvolver a lógica tal como pensada por Leibniz, isto é, como uma doutrina magna aplicável a qualquer área do conhecimento.

Gottlob Frege também se interessou pela apresentação de uma teoria a respeito da lógica, com o objetivo de garantir a base para a matemática. Em diversas publicações, com destaque para Begriffsschrift[27], de 1879 e Die Grundlagen der

---

[27] *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (Notação conceitual, uma linguagem formal do pensamento puro modelada aritmeticamente).

Arithmetik[28] de 1884, suas questões principais são: “o que são números?” e “qual a natureza das verdades aritméticas?”

Sua definição lógica de número pela ideia da classe de conceitos equinumeráveis evita a derivação a partir de objetos. Por exemplo, o conceito do número 2 não necessita da observação de um par de coisas, mas pode ser escrito como $\exists x \exists y(x \neq y \,\&\, Fx \,\&\, Fy \,\&\, \forall z(Fz \rightarrow z = x \vee z = y))$, sendo F uma propriedade qualquer (ZALTA, 2016).

As regras da aritmética e todos seus teoremas seriam, no programa de Frege, redutíveis à lógica. Pelo cálculo de predicados, com as sentenças, funções, variáveis e quantificadores, os fundamentos deveriam ser purgados de qualquer necessidade de recorrer à intuição. Fazendo uma comparação com os objetos e proposições da geometria ele afirma:

Os elementos de todas as construções geométricas são intuições, e a geometria se refere à intuição como a fonte de seus axiomas. Como o objeto da aritmética não tem um caráter intuitivo, suas proposições fundamentais não devem derivar da intuição. (FREGE, 1874, apud ZALTA, 2016)

Apesar do avanço expressivo de seus estudos, a ambição de uma estrutura lógica definitiva de Frege foi comprometida por uma falha. Bertrand Russel percebeu que o sistema permitia a ocorrência de um paradoxo que pode ser enunciado partindo do exemplo de um “conjunto dos conjuntos que não se pertencem a si mesmos”.

Esta coleção pode ser formalmente representada como $R = \{x \,/\, x \notin x\}$. Assim, se $x \in R \rightarrow x \notin x;\ se\ x \notin R \rightarrow x \in x$. O paradoxo surge quando a variável x é substituída por R. Assim, temos uma situação paradoxal, pois, se $R \in R \rightarrow R \notin R$; e, se $R \notin R \rightarrow R \in R$. A mesma situação é frequentemente descrita na forma pitoresca da narrativa do barbeiro que tem a característica de barbear todas as pessoas que não barbeiam a si mesmas.

Apesar de ter sido o responsável por acusar a inconsistência das regras de Frege tal como estavam enunciadas, Russell estava longe de ser um adversário do logicismo, pois como ele mesmo afirma em seu *Principia Mathematica*: “o fato de que

---

[28] *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* (Os fundamentos da Aritmética: uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número).

toda a Matemática é lógica simbólica é uma das grandes descobertas de nossa era.” (RUSSELL, 1903)

No amadurecimento de seu projeto, Russell modifica sua concepção a respeito da verdade matemática. Em publicações de sua juventude, assumia que, mesmo derivando da lógica, a matemática deveria manter certa relação com o mundo físico e que algumas propriedades matemáticas possuiriam uma validação empírica, por exemplo, a tridimensionalidade do espaço.

Nas obras posteriores, esta posição tende a deixar a matemática cada vez mais distante do mundo sensível e até mesmo descarta um suporte da mente humana; a matemática almejada por Russell era perfeita, sem margem de dúvidas, “um edifício de verdades que se mantém inabalável e inexpugnável contra todas as armas do cinismo duvidoso.”

Conforme aponta Kline, alguns contemporâneos de Russell, como Alfred Whitehead (1861-1947), coautor do *Principia*, e Richard Dedekind (1831-1916) eram mais prevenidos em suas afirmações sobre a perfeição e certeza absolutas da matemática cujos fundamentos estavam formulando. A questão que já começava a incomodar os matemáticos deste período era a seguinte: assumindo que a lógica garante a verdade da matemática, o que garante a verdade da lógica?

Esta dúvida pairava sobre o sistema axiomático proposto, pois ele procurava ser suficiente para evitar a ocorrência dos paradoxos já existentes, criando uma barreira de proteção, mas – diziam os críticos a este programa – isso possuía um teor excessivamente arbitrário e contrariavam a própria essência da proposta inicial que deveria se basear somente naquilo que fosse logicamente deduzido.

Esta corrente de pensamento contrária ao logicismo ficou conhecida como intuicionista e reuniu nomes como Kronecker, Lebesgue e Poincaré, tendo sido colocada em uma versão pelo holandês Luitzen Brouwer (1881-1966). Como declarados herdeiros de uma tradição que parte de Descartes e Pascal, passando por Kant, os intuicionistas têm como princípio básico que a Matemática é uma ação humana que se origina e ocorre na mente.

Brouwer (1907, apud KLINE, 1980, p. 234) define que as verdades matemáticas não derivam de uma base axiomática nem da experiência, mas são construídas mentalmente em um processo “comprometido pela obrigação de observar com reflexão, refinamento e cultivo de pensamento quais teses são aceitáveis para a intuição auto evidente da mente e quais não são.”

Os intuicionistas, dessa forma, não encontravam problemas na aceitação, por exemplo, das geometrias não-euclidianas, visto que não exigiam uma comprovação empírica nem uma base previamente estabelecida. Desde que se apresentassem como “aceitáveis para a intuição”, quaisquer geometrias seriam igualmente verdadeiras.

A tentativa de reconstruir os fundamentos da matemática a partir dos princípios intuicionistas não se mostrou frutífera e Kline avalia que isso ocorreu principalmente por discordâncias internas sobre a aceitabilidade de cada princípio e pela recusa explícita de vincular o desenvolvimento matemático às suas aplicações nas ciências.

Os matemáticos do grupo Bourbaki são um tanto severos na menção aos intuicionistas ao dizer que a memória desta escola sobreviveria “apenas como uma curiosidade histórica” (BOURBAKI, apud KLINE, 1980, p. 241). A afirmação é exagerada, pois, mesmo que não tenham se tornado uma tradição expressiva na filosofia da matemática, as críticas dos intuicionistas às abordagens clássica e logicista apontaram para pontos importantes que seriam tratados por programas vindouros.

3.1.6 FORMALISMO DE HILBERT E INCOMPLETUDE DE GÖDEL

Apesar das discordâncias, logicistas e intuicionistas tinham um objetivo comum: estabelecer os fundamentos da matemática. Outras questões, com a evolução do debate, passaram a orbitar este desafio basilar: a existência dos entes matemáticos, o infinito (potencial e atual) e o papel da linguagem na construção e na comunicação das ideias matemáticas.

Neste cenário intelectual que ocupa a passagem do século XIX para o XX, destacam-se os trabalhos daquela que passaria a ser referida como escola formalista, liderada por David Hilbert (1862-1943), que se posiciona como uma alternativa distinta de qualquer das outras abordagens, como afirma em um artigo publicado em 1927:

> Para encontrar [a matemática] não preciso de Deus, como precisou Kronecker, ou da suposição de uma faculdade especial de entendimento harmonizada com o princípio da intuição matemática, como o fez Poincaré, [...] ou finalmente, como fizeram Russell e Whitehead, axiomas de infinitude, redutibilidade e completude, que são realmente proposições substanciais, mas incapazes de serem estabelecidas através de uma prova de consistência. (HILBERT, 1927)

O plano traçado por Hilbert nas três primeiras décadas do século XX tinha como objetivo maior “estabelecer, de uma vez por todas, a certeza dos métodos matemáticos” em uma abordagem que mesclava os bons frutos das escolas logicista e intuicionista, evitando seus extremismos.

Hilbert se valeu dos trabalhos já desenvolvidos sobre notação simbólica para expressar o sistema formal que desejava: um conjunto de fórmulas cuja veracidade é comprovada pelo encadeamento de sentenças, em que cada sentença é ou um axioma ou uma dedução lógica das anteriores.

Com um princípio metodológico bem estabelecido, o desafio de Hilbert e seus apoiadores era demonstrar a consistência do sistema, isto é, as conclusões derivadas dos axiomas não deveriam apresentar contradições umas em relação às outras. O terreno crucial para o sucesso da empreitada era o campo da Aritmética, pois como salienta Kline (1980, p. 249), “provas anteriores de consistência da maioria das áreas da matemática haviam sido oferecidas na suposição de que a aritmética era consistente.”

A ferramenta de Hilbert para estabelecer a consistência de qualquer sistema formal, mas com a atenção voltada especialmente para a aritmética, foi sua Beweistheorie (teoria da prova) ou metamatemática. Este método faz uso de princípios lógicos que sejam tão óbvios que não admitam contradições (algo bem próximo da ideia intuicionista), com uma característica que chamava de finitarista, assim definida:

> Usamos a palavra “finitário” para indicar que a discussão, afirmação ou definição em pauta é mantida dentro dos limites da minuciosa produtibilidade de objetos e minuciosa praticabilidade de processos e pode ser realizada adequadamente no domínio da inspeção concreta. (HILBERT, 1934)

Um exemplo, dado pelo próprio Hilbert, para uma afirmação não-finitária é: “se p é um número primo, então existe um número primo maior que p”; a afirmação finitária correspondente seria “se p é um número primo, então existe um número primo entre p e $p! + 1$.” A diferença significativa é que a segunda sentença estabelece um processo de verificação no conjunto finito de números compreendidos entre p e $p! + 1$.

A metamatemática sofreu fortes críticas dos logicistas – “os formalistas são como um relojoeiro que está absorto em fazer que seus relógios pareçam belos que se esqueceu de seu propósito de dizer as horas e omitiu a inserção de qualquer mecanismo” (RUSSELL, apud KLINE, 1980, p. 251) e dos intuicionistas – “à questão sobre onde o rigor matemático deve ser encontrado, dois grupos dão diferentes respostas, os intuicionistas dizem, no intelecto humano; o formalista diz, no papel." (BROUWER, apud KLINE, 1980, p. 253)

Apesar das discordâncias, o anseio por estabelecer os fundamentos da matemática era comum às escolas do início do século XX. Outra característica comum foi o choque causado por um cataclismo da filosofia da matemática: o teorema de incompletude de Gödel.

O teorema afirma que "se qualquer teoria formal T adequada para contemplar a teoria dos números inteiros é consistente, então T é incompleta". Isto quer dizer que há pelo menos uma sentença S indecidível nesta teoria T, ou seja, não se pode provar, dentro de T nem a veracidade de S nem a veracidade de sua negação. (KLINE, 1980, p. 261)

Os detalhes técnicos da demonstração fogem ao objetivo deste trabalho, mas o golpe desferido por esta conclusão nos programas de Russell e Hilbert foi intenso. O anseio de descobrir exatamente o que é a matemática e poder afirmar que não mais existe o "ignorabimus" do ceticismo foi destruído pela incompletude de Gödel.

Porém, se por um lado a proposta grandiosa da plena certeza foi afetada, por outro lado, as ideias de Gödel levaram os matemáticos a ter de admitir uma multiplicidade de "verdades". Por exemplo, um conjunto axiomático pode levar em conta o axioma da escolha e outro não; um pode aceitar a hipótese de Riemann e outro rejeitá-la, e todos esses sistemas serão igualmente válidos segundo seus próprios princípios internos.

Como qualquer sistema formal consistente sempre será habitado por proposições indecidíveis, a escolha de qual conjunto de axiomas deve ser utilizado para tratar de determinado tema pode ser feita por sua aceitabilidade e praticidade. Sob este aspecto, a escola intuicionista foi a que se abalou com menor intensidade por este fenômeno do início do século XX.

Kline apresenta uma pequena fábula interessante para descrever as discussões dos matemáticos neste período:

> Nas margens do Reno, um lindo castelo tem permanecido por séculos. No porão do castelo, um intrincado emaranhado de teias foi construído por engenhosas aranhas que lá viviam. Um dia, ocorreu um vendaval que destruiu a teia. Freneticamente, as aranhas trabalharam para reparar o dano. Elas achavam que eram suas teias que estavam segurando o castelo em pé. (KLINE, 1980, p. 277)

Mesmo admitindo que o trabalho de forjar o alicerce de um castelo com teias de aranha é impossível, o desafio de definir os critérios de verdade de uma sentença (no contexto geral da linguagem, das ciências formais e, em particular, da matemática) ainda ocupou o pensamento de expressivos filósofos e matemáticos do século passado.

Quando Lakatos apresenta seu método de provas e refutações, o pano de fundo é a – ainda atual – busca pela matemática que Whitehead chamou de “divina loucura do espírito humano”. No processo de definir conceitos, provas e demonstrações verdadeiros, está a construção da linguagem com a qual se fala sobre tais entidades.

Este movimento heurístico e os resultados perceptíveis na definição dos conceitos matemáticos empregados pela comunidade dos usuários desta linguagem (e metalinguagem) serão tratados a seguir.

3.2 HEURÍSTICA

Como já mencionado anteriormente, Lakatos foi influenciado pelas ideias de seu conterrâneo George Pólya, que, em suas publicações acerca da Matemática, destacava a importância de um método heurístico para a resolução de problemas ou para a demonstração de um teorema.

Pólya, na obra “*How to solve it*”, classifica a heurística[29], ou “ars inveniendi”, como “uma área de estudo, não circunscrita muito claramente, pertencente à lógica ou à filosofia ou à psicologia, sempre esboçada, nunca apresentada em detalhes.” (PÓLYA, 1954, p. 102). Sua pretensão, acompanhada posteriormente por Lakatos, foi elevar o teor científico desses esboços, descrevendo como se pode delinear um raciocínio com base heurística.

De acordo com Kiss (2002, p. 243), o interesse de Pólya por este tema o insere em um seleto grupo de filósofos como Pappus, Arquimedes, Descartes e

[29] Apesar da nítida relação com o verbo grego *ἑυρίσκειν*, que significa descobrir, encontrar, cabe um alerta sobre o uso anacrônico quando empregado para descrever estudos anteriores ao século XIX, quando foi cunhado o termo com o significado atual. (Online Etymology Dictionary. Disponível em <http://www.etymonline.com/index.php?term=heuristic>; acesso em 15 ago. 2017)

Leibniz que também tiveram a preocupação de investigar um método para regrar o pensamento com o objetivo de encontrar soluções.

Kiss descreve ainda que, em uma carta escrita por Arquimedes a seu amigo Erastóstenes, há um relato pormenorizado sobre o processo que o matemático de Siracusa realizou para resolver um problema: o cálculo da área de uma figura plana delimitada por uma curva parabólica. A estratégia parte de um experimento mental em que faz analogias com problemas mecânicos e conclui com uma sequência dedutiva com o rigor euclidiano de sua época.

Nesse aspecto, tanto Pólya como Lakatos se assemelham a Arquimedes por sua preocupação de descrever os processos de resolução de problemas, com exemplos selecionados, para que o leitor possa, ao acompanhar como as regras e procedimentos mentais foram usados nesses exemplos, aprender a usar o mesmo método para encontrar a solução de seus próprios problemas.

Há que se destacar que a heurística assim compreendida não se refere ao estudo de fenômenos psicológicos que ocorrem com os seres humanos em seus momentos de “inspiração” ou “*insight*”, permanecendo este último tipo de pesquisa no terreno da psicologia.

Na seção 2.3.3, já foi relatado que Pólya afirma sua herança cartesiana ao priorizar a obtenção das verdades a partir de um uso sistemático das faculdades racionais. Seu trabalho tinha como tema as “operações mentais tipicamente úteis para a solução de problemas” que, ambiciosamente, considerava aplicáveis a qualquer situação de origem “algébrica ou geométrica, matemática ou não-matemática, teórica ou prática”.

Graças à sua formação acadêmica e com o objetivo de justificar a validade de seu método, o campo explorado foi a Matemática, que ele reconhecia ter duas faces: uma que carrega o caráter axiomático euclidiano e outra que admite experimentos, com uma razoável semelhança ao que ocorre nas ciências empíricas.

Como um elemento importante de seu método, Pólya cunha o conceito de *raciocínio plausível* entendido como o processo de reconhecer, na observação de objetos matemáticos e suas relações, possíveis padrões que podem ser posteriormente provados na forma rigorosa dedutiva. Como diz Kiss, o objetivo de Pólya é falar sobre

> a matemática nos bastidores, ‘in statu nascendi’, antes de receber sua forma dedutiva rigorosa. O raciocínio plausível que nos ajuda a encontrar as formas exatas finais tem padrões especiais que não seguem as regras da lógica

> formal. Estes padrões criam etapas racionais no processo de resolução de problemas. (KISS, 2002, p. 244)

Pólya elege como principais padrões desse raciocínio plausível a indução e a analogia, que emprega exaustivamente na vasta coleção de exemplos reunidas em seus trabalhos, publicados, em 1954, sob o título *Mathematics and plausible reasoning* [30].

Para exemplificar o potencial da indução na formulação das conjecturas Pólya sugere alguns exemplos. As percepções mais simples seriam casos como o seguinte: “os três primeiros termos da sequência 5, 15, 25, . . . (números terminados em 5) são divisíveis por 5. Seriam todos os demais termos divisíveis por 5?” (PÓLYA, 1954, p. 9); padrões um pouco mais sofisticados são percebidos em casos como a conjectura de Goldbach, que afirma que qualquer número par maior que dois pode ser escrito como a soma de dois fatores primos.

No entendimento de Pólya, ao deparar com uma coleção de exemplos que lhe sugiram um padrão ou uma recorrência, o matemático profissional procura conjecturar uma regra capaz de generalizar a propriedade. Para o exercício desta “atitude indutiva”, há uma série de exigências:

> Primeiro, devemos estar prontos para revisar qualquer uma de nossas crenças.
> Segundo, devemos alterar uma crença, quando houver uma razão forte para isso.
> Terceiro, não devemos mudar uma crença sem uma boa razão. (PÓLYA, 1954, p. 7-8)

Cada uma dessas três regras está respectivamente relacionada às seguintes “qualidades morais”: coragem, honestidade e moderação. A coragem leva ao enfrentamento das teorias aceitas pela maioria dos cientistas, a honestidade capacita o cientista a modificar seus discursos quando as evidências assim o demandarem e a moderação zela para que a mudança não ocorra levianamente, mas somente após cuidadosa reflexão.

O programa de Pólya, que traz a indução e uma espécie de experimentação para o campo mais abstrato da Matemática, apesar de ousado, não é inédito e ele mesmo cita as afirmações de Euler a respeito deste assunto:

---

[30] Obra dividida em dois volumes, a saber: Vol. 1: *Induction and analogy in Mathematics* e Vol. 2: *Patterns of plausible inference*.

> Parecerá não pouco paradoxal atribuir uma grande importância à observação mesmo na parte das ciências matemáticas que é normalmente chamada de Matemática pura, já que a opinião corrente é que as observações são restritas a objetos físicos que causem impressões nos sentidos. [...] Há muitas propriedades dos números com as quais estamos familiarizados, mas que ainda não somos capazes de provar; apenas as observações nos levaram a este conhecimento. [...] O tipo de conhecimento que é apoiado apenas em observações e que ainda não foi provado deve ser cuidadosamente diferenciado da verdade; ele foi adquirido por indução. Também temos visto casos em que a mera indução levou a erros. Portanto devemos tomar bastante cuidado para não aceitar como verdade as propriedades dos números que descobrimos pela observação. De fato, devemos usar tal descoberta como uma oportunidade para investigar mais precisamente as propriedades descobertas e prová-las ou refutá-las; nos dois casos podemos aprender algo útil.” (EULER apud PÓLYA, 1954, p. 3, grifos nossos)

Se, para os contemporâneos de Euler, na segunda metade do século XVIII, este assunto poderia causar estranheza, dados os movimentos que procuravam o rigor matemático dos teoremas do cálculo diferencial e integral, a situação não se mostrava tão diferente para Pólya (e Lakatos) no século XX. A posição dos filósofos e matemáticos adeptos das escolas que visavam estabelecer definitivamente os fundamentos da matemática e seus critérios de verdade não deixava muito espaço para a proposta de uma “atitude indutiva”.

É certo que a maioria dos fundacionistas não discordaria de Euler (e de Pólya), e confirmaria que “o tipo de conhecimento que é apoiado apenas em observações e que ainda não foi provado deve ser cuidadosamente diferenciado da verdade”, usando, para isso, a exata distinção traçada por Popper, entre contexto de justificação e contexto de descoberta.

Em uma etapa anterior ao programa mais sofisticado de Lakatos, Pólya, acompanhando a recomendação de Euler, é cuidadoso ao reconhecer que a indução não é suficiente para garantir a verdade e que, em alguns casos, pode conduzir a equívocos; no entanto dirige sua ênfase para a gênese de conjecturas, experimentos mentais, provas e refutações, que o processo de observação permite.

Neste exercício, o outro processo explorado por Pólya é a *analogia*, um conceito que o autor reconhece como sendo de difícil definição, mas que pode ser assim entendido: “dois sistemas são análogos se coincidem em relações claramente definíveis de suas partes.” (PÓLYA, 1954, p. 14)

Exemplificando geometricamente, o autor sugere a observação de propriedades de um triângulo e de um tetraedro. No caso da figura plana (duas dimensões), duas retas não são suficientes para definir uma região limitada que a contenha, mas três retas são. A analogia com o sólido espacial (três dimensões) é a verificação de que três planos não podem definir uma região limitada no espaço que o contenha, mas quatro planos podem fazê-lo.

De fato, várias das soluções de problemas de geometria espacial apresentadas nas obras de Pólya partem do estudo de questões análogas da geometria plana e localizam as propriedades conhecidas das figuras planas para identificar as “relações claramente definíveis” que também sejam verificadas nos sólidos.

Feferman reconhece que os estudos de Pólya não se adensaram filosoficamente, mas o elogia dizendo que

> qualquer um que tenha lido as obras de Pólya ou que assistiu suas aulas sabe que ele é inigualável dentro da estrutura para a qual ele estabeleceu sua heurística. Em contraste com Lakatos, ele se restringe a aspectos de matemática relativamente seguro. Mas é aqui que a maior parte da experiência matemática do dia-a-dia está acontecendo. Estudantes e professores não podiam pedir mais nada. O que os matemáticos profissionais podem querer, no entanto, é uma continuação na mesma linha que se concentrou nos prós e contras de encontrar provas difíceis. (FEFERMAN, 1981, p. 321)

A proposta de Lakatos vai decididamente além desse ponto de vista por considerar que: 1) as provas não são definitivas, absolutamente seguras, mas estão sujeitas a um processo de revisão contínua, inclusive (ou sobretudo) no que diz respeito ao significado dos termos que aparecem no teorema, e que nunca podem ser definitivamente fixados; 2) a refutação de teoremas anteriores e a elaboração de novos teoremas não podem ser vistas como momentos isolados, sem relação entre si, mas precisam ser compreendidos em sua dinâmica interna, articulada em torno de um processo de exame crítico da prova.

Lakatos menciona, na introdução de P&R, que suas “fontes ideológicas” podem ser encaradas como paradoxais e, efetivamente, à primeira vista parece impossível associar a tradição popperiana com estes elementos defendidos por Pólya, já que Popper é categórico ao recusar o processo indutivo para justificar uma teoria, até mesmo quando se trata de uma teoria de base empírica.

Lakatos procura, porém, suavizar esta aparente incoerência em sua mescla de influências ao dizer que a indução deve ser vista como uma *lógica de descoberta*, não como uma lógica de justificação. Esta partição – descoberta/justificação – já está traçada por Popper, mas a novidade lakatosiana é considerar a heurística digna de uma análise filosófica.

Esta análise tem o objetivo de explicar qual é a relação entre o contexto de descoberta e de justificação. A resposta de Popper é que não existe nenhuma relação, Pólya não dá uma resposta afirmativa explícita, mas coube a Lakatos afirmar que

> não existe uma lógica infalibilista de descoberta cientifica, uma que infalivelmente leve a resultados; há uma lógica falibilista de descoberta, que é a lógica do progresso cientifico. Popper, que estabeleceu a base dessa lógica de descoberta, não estava interessado na metaquestão de qual era a natureza de sua pesquisa e ele não percebeu que isso não é nem psicologia nem lógica; á uma disciplina independente, "heurística". (LAKATOS, 1978, p. 143)

O recurso de Lakatos para garantir que a “lógica da descoberta” seja considerada em seu programa filosófico é, portanto, subsumir esta ideia à heurística, uma “disciplina independente”, que deve considerar o progresso científico em toda sua extensão, com um viés claramente falibilista.

3.2.1 LÓGICA DA DESCOBERTA

Lakatos atribui a Pólya o mérito de ter revivido a heurística no século XX, mas seria o seu método apenas uma repetição de ideias antigas ou havia peculiaridades aproveitadas dos conceitos e reflexões mais atuais da filosofia e da matemática?

Para investigar as concepções de Pólya sobre a heurística, entendida sob o aspecto de uma *lógica da descoberta*, vejamos como a abordagem deste assunto havia sido feita por alguns de seus antecessores: Descartes, Hilbert e Poincaré.

Descartes manifestava, assim como outros cientistas do século XVII, o anseio por uma nova lógica, pois aquela então vigente – a dos escolásticos – não trazia nenhuma novidade para a descoberta das ciências.

Para ele, a base para a formulação de hipóteses e para toda a cadeia de deduções é a *intuição*, mas admite a incapacidade de estabelecer as regras desta faculdade mental; na explicação da quarta diretriz de suas *Regulae ad directionem ingenii* (Regras para a direção do espírito), afirma que seu método “não consegue chegar ao ponto de nos ensinar como executar as operações de intuição e dedução, porque elas são as mais simples e primitivas de todas.” (DESCARTES apud CELLUCCI, 2015, p. 13).

O programa logicista para a matemática, empreendido principalmente por Frege, obliterou – pelo menos temporariamente – qualquer iniciativa de uma reflexão sobre a questão de como se chega ao conteúdo de uma dada sentença. Para ele, este é um tema que deve ser tratado pela Psicologia, enquanto a Matemática (isto é, a Lógica) deve se preocupar em explicar os processos de justificação da assertiva.

A vertente formalista de Hilbert também não dava importância aos processos de descoberta, pois considerava a escolha de um conjunto de axiomas uma ação arbitrária e as deduções e teoremas decorrentes desses axiomas um ato simplesmente mecânico. A ênfase desta abordagem era garantir uma lógica que não levasse a contradições e que permitisse a decidibilidade em um número finito de operações.

Como já comentado na seção anterior, tratando sobre a questão da busca pela verdade na matemática, os teoremas de Gödel foram um duro golpe sofrido pelas escolas logicista e formalista, pois ao provar a incompletude e a indecidibilidade, afetaram o cerne daquilo que seria a lógica definitiva, voltada exclusivamente para a justificação, e capaz de abranger todo o conteúdo da matemática.

Uma alternativa proposta por outro eminente matemático, Henri Poincaré, considerava a descoberta matemática como um processo da mente humana que se valia dos conceitos já conhecidos para fazer novas combinações, não de maneira aleatória, mas com a intenção de produzir resultados úteis e belos. “A descoberta consiste precisamente em não construir combinações inúteis, mas construir aquelas que são úteis, pertencentes a uma minoria infinitamente menor. Descoberta é discernimento, escolha.” (POINCARÉ, 1914, p. 51)

Essa visão de Poincaré não é afetada pelos teoremas de Gödel[31], já que a concepção do matemático francês fica condicionada a um critério subjetivo para avaliar a utilidade e a “beleza matemática” das combinações sugeridas.

Em virtude da incapacidade de arquitetar uma lógica da descoberta que, substituindo a escolástica, fosse capaz de dar conta das ciências naturais modernas, Cellucci (2015) destaca a forte afirmação de Tarski: “há pouca justificativa racional para combinar a discussão da lógica e da metodologia das ciências empíricas.”

Laudan, em seu artigo *Why was the logic of discovery abandoned*, coloca para seus leitores – filósofos da ciência e da matemática – a seguinte indagação: “Por que

---

[31] Em certa medida, Poincaré comungava, antecipadamente, das ideias de Gödel, já que ele “negou desde o início a possibilidade de uma prova de consistência para os axiomas aritméticos, mantendo que a consistência do método de indução matemática nunca poderia ser comprovada, exceto através do próprio método indutivo.” (HILBERT, 1928)

a lógica da descoberta deveria ser revivida?" e Celluci oferece duas possíveis razões para tal reavivamento.

> Por um lado, porque, pelo segundo teorema de incompletude de Gödel, a lógica matemática falha em ser a lógica de justificação e somente revivendo a lógica da descoberta, a lógica pode continuar a ter um papel importante. Por outro lado, os cientistas usam ferramentas heurísticas em seu ofício e pode ser útil estudar tais ferramentas sistematicamente visando aperfeiçoar as atuais e desenvolver novas. (CELLUCCI, 2015, p. 16)

A primeira resposta de Cellucci à questão de Laudan é – no mínimo – imprecisa e, mesmo se reformulada, não sustenta a argumentação de que as atenções devem se voltar para a lógica da descoberta. A segunda afirmação, no entanto, ainda que de forma ingênua, aponta para a visão compartilhada por Pólya e Lakatos sobre a necessidade de um estudo dedicado à heurística.

A posição de Pólya, por exemplo, dava ênfase ao estudo das ferramentas heurísticas com o objetivo de melhor compreendê-las. Seus conceitos de "atitude indutiva", "raciocínio plausível" e sua lista de quatro etapas[32] para a resolução de problemas foram importantes neste aspecto[33].

É importante salientar, no entanto, que o próprio Pólya reconhecia a controvérsia que suas propostas poderiam gerar e, em uma correspondência enviada a Lakatos em dezembro de 1965, oferecendo sua crítica sobre P&R, diz:

> Caro Imre, [...] Posso ver claramente como Proofs and Refutations se relaciona com meu trabalho. A diferença básica é esta: eu mesmo dificilmente seria capaz de dizer algo sobre 'epistemologia' que pudesse merecer a atenção do público e mesmo que fosse capaz de dizer algo sobre isso, eu me furtaria a fazê-lo. Já é difícil o bastante para o público aceitar a heurística. [...] O ponto principal de "Proofs and Refutations" é, pelo menos a meu ver, chamar a atenção para a possível conexão entre heurística e epistemologia. (PÓLYA, apud MOTTERLINI, 2002, p. 29)

O *método de provas e refutações*, valendo-se do reavivamento da heurística feito por Pólya, estabelece de fato sua conexão com a epistemologia: no caso, com questões sobre a origem, a estrutura e as formas de se obter e justificar o conhecimento (no caso particular, o conhecimento matemático).

---

[32] Compreender o problema, planejar sua resolução, executar o plano e examinar a solução.

[33] Como já comentado, as propostas de Pólya, mesmo tendo sido importantes e influente no trabalho de Lakatos, não possuem a mesma abordagem filosófica dada por este último. As ideias de "atitude indutiva", "raciocínio plausível" podem ser vistos como princípios posteriormente aperfeiçoados no programa lakatosiano que trata da dinâmica interna capaz de relacionar descoberta e justificação, via análise da prova.

Inicialmente, Lakatos toma o raciocínio plausível como ponto de partida na percepção de padrões no conjunto de informações observado (por exemplo, a relação existente entre as quantidades de faces, vértices e arestas dos poliedros) que permite elaborar hipóteses.

Em seguida, o exercício de experimentos mentais que indiquem a validade da conjectura é feito com recursos da analogia (o experimento de Cauchy acaba se tratando de uma verificação de propriedades de uma malha triangular plana para garantir as propriedades de um objeto tridimensional).

Finalmente, o método de Lakatos recomenda aos matemáticos as virtudes morais sugeridas por Pólya: coragem, para admitir que qualquer elemento pode ser refutado (seja um componente da conjectura ou uma etapa da prova), honestidade para efetuar as modificações e moderação para manter vigente a teoria ainda não confrontada por contraexemplos.

A decisão de Lakatos de introduzir em sua teoria essas “virtudes morais” de Polya certamente o deixam em uma posição de forte tensão no objetivo de manter o racionalismo popperiano sem se deixar levar por aspectos que possam ser classificados como objetos de estudo da psicologia.

Este comportamento heurístico para lidar com os objetos matemáticos e suas relações tem impacto em vários aspectos da filosofia da matemática; dentre eles, a questão da formação dos conceitos e do vocabulário utilizado. No próximo trecho desta seção comentaremos a interpretação de Lakatos acerca do processo de evolução dos termos e conceitos.

3.2.2 Formação de conceitos

Compreender como se dá o fenômeno da linguagem, e particularmente o uso de conceitos, é um anseio antigo da filosofia e várias tentativas de respostas já foram apresentadas ao longo do tempo.

No nosso caso particular, buscamos manter uma limitação às soluções que compreendam os conceitos matemáticos. Assim, não tratamos de conceitos relativos a propriedades sensórias (cores, sons etc.), emoções (dor, alegria, amor etc.), nem de faculdades intelectuais ou morais (pensamento, justiça etc.). Cabe aqui apenas – e já é um campo vastíssimo – considerar questões como: “o que é um triângulo?” ou “o que é um número primo?”

Já no Crátilo, Platão procurava investigar o modo de funcionamento das palavras. As seguintes questões, em particular, preocupavam-no: Como uma palavra pode ganhar significado? Qual é o modo correto de definir as palavras?

Mantendo suspensas essas perguntas, avaliamos o que acontece no caso particular dos termos matemáticos, que constituem o vocabulário para descrever os objetos desta área e suas propriedades.

Um triângulo, por exemplo, é definido a partir de termos anteriores como lado, ângulo, vértice; estes termos necessitam ser definidos a partir de elementos ainda mais básicos (ponto, reta, relação de pertinência) até que se atinja um limite em que não se encontra uma definição que não seja arbitrária ou axiomática.

Apenas para indicar outro objeto, fora do ambiente geométrico euclidiano, o conceito de número primo como “aquele que admite apenas dois divisores distintos” depende das noções de número (inteiro positivo), de divisibilidade e de igualdade.

Procuramos percorrer o exemplo mais significativo de P&R, isto é, o conceito de *poliedro*, para examinar como o termo poliedro teve diferentes definições, implicando inclusive a necessidade do detalhamento de outros termos associados.

Ao longo do debate de P&R, o conceito matemático de poliedro é redefinido várias vezes. Apenas para citar algumas das formulações, temos:

> Def. 1: poliedro é um sólido cuja superfície é constituída de faces poligonais.
> Def. 2: poliedro é uma superfície constituída de um sistema de polígonos.
> Def. 3: poliedro é um sistema de polígonos disposto de tal forma que
> (i) exatamente dois polígonos se interceptam em cada aresta e
> (ii) é possível obter uma trajetória de um ponto interior de um polígono a um outro ponto, interior de outro polígono, sem que passe por um vértice.
> Def. P: poliedro é um sistema de polígonos no qual a relação $V - A + F = 2$ é verificada. (LAKATOS, 1977, pp. 14-16)

As definições acima listadas são devidas, respectivamente, a Legendre (1794), Jonquieres (1890), Möbius (1865) e Baltzer (1860). Elas mostram a dificuldade que a comunidade de matemáticos tinha (e ainda tem) de construir definições coerentes e esclarecedoras para os objetos mais elementares da teoria.

A primeira das definições acima listadas foi utilizada – mesmo que não explicitamente – por séculos e ainda é encontrada em dicionários não especializados e livros didáticos.

A Definição 3 faz uso de conceitos auxiliares, ao mencionar os termos *vértice* e *aresta*. A esse respeito, é importante o comentário de Cromwell (1997), que afirma que, até Euler, não havia o uso regular dos nomes desses elementos dos poliedros, tão corriqueiros atualmente.

O que o matemático suíço fez foi mais que dar um nome para alguma coisa ainda não nominada, já que a definição dos termos era necessária em virtude da maneira como passava a estudar os poliedros.

Euler percebera que os polígonos, figuras caracteristicamente planas, poderiam sempre ser definidos em função de pontos e ângulos[34], mas que a "estereometria" (nome antigo dado aos estudos da geometria espacial) exigia uma ampliação de nomenclatura para o tratamento dos poliedros.

Assim, em seu artigo de 1758, expõe o seguinte vocabulário: *angulus solidus*, *acies* e *hedra*, que afirmava ser adequado para definir claramente os "sólidos" estudados.

> Três tipos de limites devem ser considerados em qualquer corpo sólido, a saber, pontos, linhas e superfícies ou, com os nomes usados especificamente para este fim, vértices, arestas e faces. Estes três tipos de limites determinam completamente o sólido. (EULER, apud CROMWELL, 1997, p. 191)

O conceito tem, portanto, a dupla função de descrever a constituição da coisa e permitir a classificação dos objetos observados em um conjunto que reúna os entes que compartilham de tal definição. Em outras palavras, uma definição adequada de *poliedro* deve dizer como um poliedro é formado e estabelecer critérios para avaliar se um objeto colocado sob análise é ou não um membro da família dos poliedros.

O matemático contemporâneo Branko Grünbaum (2003), tratando desta dificuldade conceitual, apresenta, em seu artigo *"Are your polyhedra the same as my polyhedra?*" uma lista de sete requisitos que devem ser verificados para que uma determinada combinação de vértices, arestas e faces sejam genuínos poliedros.

Dispensando os detalhes técnicos, a definição de Grünbaum é ainda mais complexa, pois depende de uma série de outros conceitos, tais como as relações de incidência, adjacência e noções de combinatória, sem esquecer-se da já mencionada necessidade de definição precisa dos termos: faces, vértices e arestas.

Regressando à questão platônica e assumindo provisoriamente a premissa de que alguém que conhece o nome "poliedro" sabe avaliar se uma coisa é um

---

[34] Uma forma de descrever um polígono é apresentar uma sequência indexada de pontos $A_1A_2A_3 \dots A_nA_1$, indicando a medida de cada ângulo α_i $(1 \leq i \leq n)$, definido por cada terna de pontos consecutivos.

poliedro, identificamos um problema nesta breve coletânea de distintas definições apresentadas por Lakatos: não se consegue vincular o nome a algo bem determinado.

No caso de conceitos empíricos (que se referem a coisas do mundo físico), dispomos de um método específico para sua aplicação (ou seja, para a atribuição de valores de verdade nas proposições em que esses termos aparecem): o uso dos órgãos sensíveis. No caso de um objeto matemático, o desafio é maior, pois, mesmo que se considere uma existência platônica em um mundo das formas, o recurso sensorial não está disponível.

Percebemos as dificuldades da abordagem platônica quando consideramos os contraexemplos (as anomalias) presentes no debate de P&R, como os sólidos com furos ou estruturas múltiplas. Se algo que não poderia ser considerado poliedro baseado em uma definição passa a sê-lo em outra formulação, isso significa que o conceito geral de poliedro sofreu modificação, contradizendo a perenidade e incorruptibilidade dos seres ideais.

Isso significa, pelo menos no que diz respeito aos entes matemáticos, que o conceito não tem o objetivo de traçar uma definição que alcance a perfeição de uma ideia já existente, mas deve garantir à teoria que o utiliza a consistência das afirmações e teoremas em que está envolvido.

Outro problema que pode ser apontado está no processo de validação do conceito; se o juízo sobre a correção do uso de um conceito dado em uma linguagem L1 for certificado pelas regras de uma metalinguagem L2, encontra-se de novo em uma inescapável regressão infinita, pois a metalinguagem teria de ser validada por uma meta-metalinguagem e assim por diante.

A alternativa restante é que a própria linguagem, estruturada e evoluída em uma comunidade de usuários, seja a responsável por definir o significado de um termo. Mesmo que pareça redundante, *um poliedro é aquilo que nós entendemos por poliedro*. O pronome "nós" aqui usado significa a totalidade daqueles que utilizam uma linguagem em que o nome "poliedro" está presente[35].

---

[35] Certamente, distintos grupos de falantes poderão utilizar esse termo ("poliedro") em sua linguagem, com distintas demarcações; usando a metáfora de Lakatos, o "lápis" que delimita o critério pode estar mais ou menos "apontado" e a concepção de um matemático profissional não é necessariamente a mesma de um estudante com conhecimentos medianos de matemática.

Assim, seja a definição de poliedro “um sistema de polígonos” ou a complicada relação de requisitos de Grünbaum, este será o critério para traçar o limite sempre volúvel e impreciso que serve para classificar os objetos como pertencentes ou não ao conjunto dos que podem ser chamados por este nome.

Aqui ganha força o papel do processo heurístico que Pólya afirmara que Lakatos conseguiu conciliar com aspectos epistemológicos. Os conceitos não são vinculados aos nomes por uma exigência natural, por uma arbitrariedade ou por uma mera convenção; o processo é marcado por uma reformulação contínua dos contextos de prova em que os nomes são utilizados, e que só eles são capazes de, progressivamente, ir delimitando seus significados, sem que seja possível atingir um estágio final e definitivo.

Um ponto importante indicado por Lakatos no debate de P&R é o fato de que Euler enunciou seu teorema a respeito de poliedros sem incluir uma definição explícita deste objeto matemático, aproveitando o conceito dado pelo senso comum e herdado de Euclides.

A necessidade de esclarecer o conceito não surge por um capricho dos matemáticos, mas pela necessidade de classificar os elementos para os quais o teorema de Euler se mantém válido. Definir bem o limite do que se entende por poliedro era, nas primeiras investidas, um recurso de barramento de “monstros”. Um exemplo marcante é o que Lakatos chama de a definição perfeita: “poliedro é um sistema de polígonos no qual a relação $\mathrm{V} - \mathrm{A} + \mathrm{F} = 2$ é verificada”.

O procedimento heurístico demanda, no entanto, um comportamento oposto ao empreendido nessas primeiras tentativas de definir o conceito de poliedro. Ao invés de criar uma estagnação e um limite excludente, o método de provas e refutações, enquanto busca o aperfeiçoamento da conjectura e das demonstrações, em um movimento de idas e voltas, acaba por demandar reformulações dos conceitos para acompanhar a evolução da díade teorema-prova.

Assim, não somente o conceito central de poliedro deve sofrer modificações contínuas, como também os conceitos acessórios e periféricos, como os elementos já comentados *vértices*, *faces* e *arestas* ou aqueles que foram trazidos à tona pela observação das anomalias, tais como *cavidades* e *estruturas múltiplas*.

No método de Lakatos, uma sofisticação conceitual ocorre quando surgem novas refutações que exijam a revisão dos conceitos associados. Essas reformulações dos conceitos devem ser testadas nos mesmos parâmetros dos jogos de linguagem que as causaram; isto é, uma concepção diferente do conceito de poliedro deve ser suficiente para manter a comunicação a respeito deste objeto na comunidade dos matemáticos que o estudam.

Uma dúvida levantada pelo próprio Lakatos diz respeito à existência de um limite para este processo, isto é, se haveria um ponto de saturação para as reformulações de um conceito que atingiria uma linguagem perfeita.

Se os teoremas matemáticos estão, como parte de uma linguagem que são, permanentemente expostos às possibilidades de reinterpretação e reorganização dessa linguagem – a qual nunca encontra pontos de apoio fixos no mundo -, então parece não fazer sentido a suposição de um estágio terminal. Lakatos, porém, não chega a ser claro quanto a essa questão.

É possível reconhecer, no entanto, por meio da observação histórica, que há fases de razoável estabilidade na aceitação de um dado conceito. A aceitabilidade de uma definição presente em um “programa de pesquisa progressivo” – para usar um jargão lakatosiano – é dada pela comunidade científica que assume um papel semelhante ao de um crítico literário que julga as publicações de determinada matéria.

3.3 RIGOR MATEMÁTICO EM UM PROCESSO HEURÍSTICO

Considerando o desenvolvimento das ciências modernas, parece redundância mencionar que há uma preocupação importante no desenvolvimento da matemática com o rigor em suas proposições e provas, visto que, ao menos no senso comum, esta área do conhecimento é entendida como uma espécie de modelo para o tratamento rigoroso.

Desde as primeiras formulações de um conhecimento matemático sistematizado, a atenção ao rigor foi presente mas não ficou estabelecido de forma estática, pois ao acompanhar as dificuldades da evolução da própria linguagem matemática, os ideais de rigor passaram também por reformulações.

Um evento marcante ocorreu no século XVII, em que, com o advento do cálculo diferencial e integral, a comunidade matemática se encontrou em um estágio praticamente sem precedentes desde a sistematização dos conhecimentos geométricos por Euclides, nos Elementos. Extremamente útil para resolver problemas computacionais aplicados, na determinação de grandezas como área, volume, velocidade e aceleração, a novidade introduzida por Newton e Leibniz na prática matemática carecia, em seus primórdios, de explicações mais firmes.

Coube aos matemáticos do século seguinte, especialmente Cauchy e Weierstrass, o trabalho de tornar mais rigorosas as bases da Análise, como passou a ser identificada esta subárea da Matemática. Do ponto de vista filosófico, a preocupação com o rigor está bastante atrelada à concepção de que a matemática necessita esclarecer seus fundamentos. A busca pelo rigor parece sempre levantar dúvidas sobre as bases em que a teoria se apoia.

Em um modelo euclidiano, por exemplo, o rigor é associado a um conjunto bem escolhido de princípios elementares e a uma regra clara de transmissão de valores lógicos de verdade, das premissas aos teoremas. O conjunto das sentenças inquestionáveis e não demonstráveis constitui uma base axiomática, enquanto o encadeamento lógico das afirmações garantem as regras para o processo de dedução de novas proposições.

Outras abordagens que firmam os fundamentos da matemática na lógica ou em uma metalinguagem possuem critérios para a avaliação do rigor vinculados a suas concepções. Para um logicista, uma demonstração é suficientemente rigorosa se faz uso correto de uma linguagem lógica apta, desde o início, a descrever o mundo; para um formalista, o rigor é medido pelo rigor na articulação de um sistema simbólico essencialmente não interpretado, mas cuja consistência precisaria ser demonstrada.

O posicionamento de Lakatos a respeito do desenvolvimento da matemática rejeita as tentativas de estabelecer dogmaticamente qualquer tipo de fundamentos e introduz a heurística como elemento central para a revisão constante dos conceitos e das demonstrações. Como lidar, em um cenário assim compreendido, com a questão do rigor?

3.3.1 RIGOR MATEMÁTICO

Como assinalado há pouco, dependendo dos assuntos ou da abordagem escolhidos, a ideia de rigor pode ser distinta. O matemático George F. Simmons, no prefácio de seu manual de equações diferenciais, faz uma pitoresca analogia: “O rigor matemático é como uma roupa: no seu estilo, deve se adequar à ocasião, e causa a diminuição do conforto e restrição da liberdade de movimento se for demasiado solta ou muito apertada.” (SIMMMONS, 1979, p. ix)

Na seção 2.4.9, mencionamos sucintamente que Lakatos dedica uma nota em P&R para comentar alguns marcos na história da Matemática, tendo como interesse a questão do rigor. Ele identifica que, até o início do século XIX, havia uma concepção vigente de que a prova, vista como “um experimento mental ou construção clara como cristal”, era a base para uma Matemática infalível.

Para Kant, por exemplo, “a solidez da matemática repousa em definições, axiomas e demonstrações”, demonstrações estas que são “provas apodíticas”:

> Só a matemática, portanto, contém demonstrações, porque não deriva de conceitos o seu conhecimento, mas da construção de conceitos, isto é, da intuição que pode ser dada a priori em correspondência aos conceitos. Mesmo o método da álgebra, com as suas equações, das quais extrai, por redução, a verdade, juntamente com a prova, não é, sem dúvida nenhuma, uma construção geométrica, mas contudo uma construção característica, na qual, com a ajuda de sinais, se representam os conceitos na intuição, especialmente os de relação de grandezas e onde, sem mesmo considerar o aspecto heurístico, todas as conclusões estão garantidas contra o erro pelo fato de cada uma delas ser posta à nossa vista. (KANT, CRP, A734, B762)

Esta ideia cria um fenômeno cíclico de sustentação mútua, já que a prova (nos termos de Euler, a “rigida demonstratio”) é inquestionável e trata de entes matemáticos absolutamente conhecidos. Quaisquer contraexemplos que pudessem ameaçar o rigor estabelecido deveriam ser, portanto, tratados como monstruosidades e expurgados do domínio cristalino estabelecido.

O aparecimento das geometrias não-euclidianas e de algumas anomalias no estudo de propriedades de funções levaram, no entanto, a questionamentos a respeitos das demonstrações e seus fundamentos. Ao submeter as provas a uma avaliação crítica, ficou instituída a necessidade de rigor também nesta operação: a análise da prova.

Lakatos nomeia este período como a “revolução de Cauchy”, em que as atenções se voltaram para a determinação criteriosa dos domínios de validade dos teoremas já provados e, consequentemente, para o esclarecimento de um alicerce conceitual.

No prefácio de uma de suas obras mais conhecidas, o Cours D’Analyse, de 1821, Augustin Cauchy descreve seu objetivo e sua metodologia

> Decidi escrever este curso para a grande utilidade dos estudantes [...] Com relação aos métodos, procurei dar todo o rigor que se exige da geometria, de tal forma que não seja necessário confiar nos argumentos obtidos da generalidade da álgebra. Argumentos desse tipo, ainda que comumente

> aceitos [...] devem ser considerados, me parece, apenas como exemplos servindo para apresentar a verdade em alguns casos, mas não estão em harmonia com a exatidão tão alardeada pelas ciências matemáticas. Devemos também observar que eles tendem a abranger um escopo ilimitado de fórmulas algébricas, enquanto que, na realidade, muitas dessas fórmulas são válidas somente sob certas condições ou para certos valores das quantidades envolvidas. Determinando estas condições e estes valores e estabelecendo precisamente o significado da notação que usarei, farei toda a incerteza desaparecer. (CAUCHY, 1821, p. 2)

O matemático francês indica o ambicioso anseio de livrar as teorias matemáticas desenvolvidas por seus profícuos antecessores, tais como Leibniz, Laplace e Fourier, das imprecisões causadas pela simbologia ainda em construção e especialmente pela insegurança conceitual e pela precária definição dos domínios de validade.

Apesar do esforço vigente no século XIX para se afastar da intuição (e principalmente da intuição geométrica) como fonte de rigor, Cauchy parece preferir a geometria como padrão para o desenvolvimento rigoroso da Análise, já que a alternativa algébrica ainda apresentava lacunas em seu desenvolvimento.

Ainda na introdução mencionada, afirma que “antes de somar qualquer série, devo examinar os casos em que séries podem ser somadas, ou, em outras palavras, as condições para sua convergência” (CAUCHY, 1821, p. 3) Não nos preocupando com o significado dos termos matemáticos, fica explícita, nesta frase, a intenção de Cauchy de se preocupar com o esclarecimento das propriedades e conceitos antes de partir para aplicações ou cálculos.

A atenção voltada para a ação de traçar uma linha divisória dos entes matemáticos que podem (ou não) ser objetos de certo teorema é o que Lakatos chama de rigor na análise da prova. No procedimento, cada item enunciado no teorema e cada etapa da prova devem ser minuciosamente avaliados, buscando verificar possíveis contraexemplos.

É interessante que Cauchy deixe clara sua preocupação exclusiva com o desenvolvimento das ciências matemáticas, destacadas de outras áreas do conhecimento humano. Esse comportamento passaria a caracterizar a atividade profissional de vários matemáticos do século XIX.

> Se eu procurei, por um lado, aperfeiçoar a análise matemática, por outro lado, estou longe de pretender que esta análise seja aplicada a todas as ciências racionais. [...] Devemos acreditar que há verdades além das verdades algébricas e realidades outras que não são aquelas dos objetos tangíveis.

> Vamos cultivar com ardor as ciências matemáticas, sem desejar ampliá-las além de seu domínio; e não vamos imaginar que somos capazes de atacar a história com fórmulas nem fazer juízos morais com teoremas da álgebra ou do cálculo integral. (CAUCHY, 1821, p. 3)

Há que se mencionar que, apesar da importância de Cauchy no movimento que pretendia garantir o rigor na análise matemática, não é possível atribuir-lhe o pioneirismo. O sacerdote Bernard Bolzano, natural de Praga (à época pertencente à Boêmia, hoje capital da República Checa), nascido em 1781, após seus estudos de matemática e filosofia, dedicou-se a estudar assuntos matemáticos “puramente especulativos”, que, para ele, era “a parte da matemática que é, ao mesmo tempo, filosofia.” (BOLZANO, apud O’CONNOR; ROBERTSON, 2005).

Bolzano foi influenciado pelos escritos do matemático alemão Abraham Kästner (1719-1800), em especial pela obra *Mathematische Anfangsgründe* (Fundamentos matemáticos) dedicada a provar muitos resultados considerados óbvios por outros matemáticos da época.

No prefácio da tese de doutorado de Bolzano, defendida sob a orientação de Frantisek Gerstner, fica claro que ele pretendia seguir, no âmbito da filosofia da matemática, as pretensões de Kästner, quando afirma que

> Eu não poderia ficar satisfeito com uma prova completamente rigorosa se esta não fosse derivada de conceitos contidos na tese a ser provada, mas que tivesse feito uso de um conceito fortuito, estranho e intermediário, que é sempre uma transição errada para outro tipo. (BOLZANO, apud O’CONNOR; ROBERTSON, 2005).

Em seus trabalhos matemáticos, Bolzano tratou da maioria dos temas que faziam parte das tentativas de Cauchy e seus interlocutores, mas, em virtude de suas ocupações como sacerdote de uma ordem monástica e por não estar em um dos grandes polos de pesquisa e divulgação científica, suas contribuições foram quase imperceptíveis durante sua vida (Bolzano morreu em 1848)[36]. O reconhecimento da

[36] As ideias de Bolzano também influenciaram o desenvolvimento da psicologia no século XIX, pelo resgate de suas obras *Wissenschaftslehere* e *Paradoxien des Unendlichen*, feito por Franz Brentano (1838-1917). Brentano tem destaque por sua obra *Psychologie von Empirischem Standpunkt* e por sua significativa descendência acadêmica, que inclui Carl Stumpf (1848-1936), Kasimir Twardowski (1866-1938), Alexius Meinong (1853-1920), Thomas Masaryk (1850-1937) e Edmund Husserl (1859-1938).

qualidade de sua obra se deve ao resgate e comunicação feitos pelo matemático alemão Hermann Hankel, em 1871 (BOTTAZZINI, 1986).

No que tange à questão do rigor, Bolzano, no artigo cujo título se inicia com *Rein analytischer Beweis*[37], publicado em 1817, apresenta um princípio que deveria reger a busca pelo rigor nas demonstrações: a análise matemática não deve buscar seus princípios fundamentais e seus critérios de rigor em qualquer outra ciência ou em outro ramo da própria matemática, como a geometria.

Criticando a demonstração apresentada por ninguém menos que Gauss para o chamado Teorema fundamental da álgebra, Bolzano é contundente ao dizer:

> [...] é claro que é uma ofensa intolerável contra o método correto querer derivar as verdades da matemática pura ou geral (isto é, aritmética, álgebra ou análise) de considerações que pertencem a áreas puramente aplicadas, isto é, à geometria. (BOLZANO, apud BOTTAZZINI, 1986, p 98).

As ideias de Bolzano pareciam atender a uma necessidade que Lagrange, na época, havia formulado da seguinte maneira: o desenvolvimento de uma “metafísica do cálculo”, aludindo com isso ao rigor puramente conceitual que se exigia para a matéria.

Exemplificando, podemos tomar a compreensão de um conceito básico do cálculo infinitesimal: as razões de quantidades infinitesimais. Este objeto matemático é elementar para operações com derivadas e pode ser simbolicamente representado como $\frac{dx}{dy}$, em que dy é um valor que “*tende a zero”*, ou ainda, que pode ser “*tão pequeno quanto se queira”*.

Outro conceito que demandava esclarecimento era a *continuidade de funções*, que era associado ao fato de que o gráfico de uma função poderia ser desenhado sem interrupções no traço ou que um ponto considerado móvel sobre uma trajetória poderia percorrê-la sem obstáculos ou saltos.

O incômodo causado em diversos matemáticos era a instável sustentação de toda uma teoria sobre uma base que continha um ente aceito por recursos pouco

---

[37] *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes daß zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege* (Prova puramente analítica do teorema de que entre cada dois valores que produzem um resultado de sinais opostos se encontra, pelo menos, uma raiz real da equação).

claros de linguagem (tão pequeno quanto se deseja) ou por uma intuição físico-geométrica.

Apesar dos esforços de Cauchy, este aspecto ainda permaneceu questionado até que os trabalhos de Abel, Dedekind e principalmente Weierstrass originaram um movimento que recebeu o título de *aritmetização da análise*.

De acordo com Dugac (1973), durante os cursos de análise e cálculo diferencial que ministravam, Weierstrass e Dedekind[38] sentiram um maior incômodo em relação à fraca sustentação dos métodos que apresemtavam e passaram a dirigir a atenção para seus fundamentos. Foi nesse período que ambos passaram a publicar suas pesquisas a respeito da teoria dos números reais.

Botazzinni localiza na segunda metade do século XIX o momento marcante no desenvolvimento da matemática:

> Em face de uma extraordinária prosperidade de novos resultados, aqueles matemáticos que estavam mais atentos a questões metodológicas começaram a perceber que os teoremas fundamentais da análise e mesmo aquelas ideias que pareciam ser as mais seguras careciam de fundamento rigoroso. (BOTAZZINNI, 1983, p. 258)

Weierstrass, identificado por Lakatos como referência do movimento de revolução do rigor, foi responsável pelo estabelecimento de uma base rigorosa que permitisse sustentar provas igualmente rigorosas. Conceitos basilares como números, funções, limite e continuidade foram devidamente explicitados, com o cuidado de usar princípios que fossem oriundos tão somente da própria matemática abstrata (isto é, da análise), sem recorrer à geometria ou a intuições dos sentidos.

Outros matemáticos, na mesma época, empreenderam semelhantes tentativas de esclarecer os fundamentos do cálculo infinitesimal, porém, traçando outros percursos argumentativos; Dedekind, em sua obra de 1872, usa uma paráfrase do aforismo de Platão "Deus geometriza", assumindo o lema "o Homem aritmetiza" e diz, no prefácio, que

> Nós sempre dizemos que o cálculo diferencial diz respeito a grandezas contínuas e, até agora, uma definição de continuidade ainda não foi dada. Mesmo a mais rigorosa apresentação do cálculo diferencial não baseia suas prova na continuidade, mas apelam com maior ou menor consciência a

38 No período de 1856 a 1864, Carl Weierstrass foi docente do Gewerbeinstitut, atualmente Technische Universität Berlin. Richard Dedekind lecionou no Polytechnikum de Zurique, hoje Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, de 1858 a 1862.

> imagens geométricas ou confiam em teoremas que não foram provados usando métodos puramente aritméticos. (DEDEKIND, 1872)

A proposta de Georg Cantor com o objetivo de provar os teoremas da análise com métodos puramente aritméticos foi apresentar uma teoria que desse conta dos conjuntos numéricos: racionais, irracionais e reais, dado que os demais conceitos tais como função ou limite são dependentes das propriedades desses conjuntos.

O trabalho de Cantor, no entanto, levou a outro impasse na comunidade dos matemáticos e filósofos da matemática, quando tocou no difícil tema do infinito – um incômodo desde Zenão de Eleia. Em sua teoria surgem os conceitos de ordinais, números transfinitos e cardinalidade de conjuntos, terminologias específicas que não cabem ao escopo deste texto; o que vale notar – assim como Lakatos o faz – é que no cenário acadêmico, as ideias de Cantor criam um embate caloroso entre seus defensores, tais como Zermelo e Hilbert, e seus adversários: Poincaré, Weyl e, especialmente, Kronecker.

O abalo causado pelo surgimento das geometrias não euclidianas e as tentativas de estabelecer os fundamentos da análise impulsionaram, na virada do século XIX para o século XX, as diversas escolas filosóficas que pretendiam dar as respostas exigidas pela comunidade matemática, ansiosa para erigir sua teoria sobre uma base que não dependesse de intuições físico-geométricas ou de interpretações da linguagem convencional.

Se acompanharmos o argumento de Lakatos, identificamos que a preocupação com o rigor da prova levou à sofisticação da análise da prova, que, por sua vez, levou às questões sobre os fundamentos da teoria. Faz sentido, então, admitir que este tem sido um processo evolutivo que se assemelha aos princípios da heurística de Pólya: analisar a conjectura detalhadamente e modificá-la sempre que houver razões suficientes para tal.

Retornando ao texto de P&R, Lakatos assim apresenta sua conclusão sobre esta reconstrução histórica:

> Em cada ‘revolução de rigor’, a análise das provas penetra mais fundo na camada fundamental do ‘contexto de conhecimento familiar’, em que a intuição límpida, o rigor da prova, reina de forma suprema e a crítica é banida. [...] A ‘certeza’ nunca é atingida, os ‘fundamentos’ nunca são encontrados, mas a ‘sagacidade da razão’ transforma cada incremento de rigor em um incremento de conteúdo. (LAKATOS, 1977, p. 56, 1963, p. 235)

Aumentar o conteúdo de uma teoria sugere ampliar seu domínio de validade. Um procedimento heurístico, que avalia as provas e revisa as “camadas fundamentais” é capaz de alcançar este objetivo? Tratamos deste ponto a seguir.

3.3.2 INCREMENTO DE CONTEÚDO

Lakatos, em sua Metodologia dos Programas de Pesquisa Científica, apresenta a ideia de tomar o *conteúdo* de um programa de pesquisa científica como a grandeza adequada para avaliar seu progresso ou degeneração.

> Um programa de pesquisa é melhor do que seus rivais (portanto, é preferível) se a sequência das teorias produzidas sob ele mostra um aumento maior de conteúdo que a sequência de teorias produzidas sob o programa rival. (RADNITZKY; ANDERSSON, 1978, p. 9)

Este “incremento de conteúdo”, como Lakatos o denomina, faz parte do debate realizado pelos personagens de P&R, que questionam a relação entre a busca pelo rigor científico (no caso particular, matemático) e o incremento de conteúdo. De forma indireta, o problema levantado é a relação entre a heurística e os fatos que são acertadamente preditos e explicados por uma teoria (na verdade, por um programa de pesquisa).

Os pensamentos de Lakatos em P&R estão em um estágio intermediário entre os trabalhos de Popper que o influenciaram e a teoria dos Programas de Pesquisa que ele viria a desenvolver, voltada de forma mais abrangente para a Filosofia da Ciência.

Para oferecer um critério racional para a seleção da melhor teoria Popper indica seus princípios:

> Entre as ideias regulatórias que regem a discussão crítica de teorias concorrentes, três são da maior importância: primeiro, a <u>ideia da verdade</u>; segundo, a ideia do <u>conteúdo lógico e empírico</u> de uma teoria; e terceiro, a ideia do conteúdo de verdade de uma teoria e de sua <u>aproximação da verdade</u>. (POPPER, 2007, p 19 – grifos nossos)

A “ideia da verdade” não parece demandar uma explicação detalhada, visto que, em uma investigação científica, é de se esperar explicações verdadeiras e esquivar-se daquelas que forem falsas. Com relação à segunda ideia, porém, cabe um detalhamento do que se deve entender como “conteúdo lógico” e “conteúdo empírico” de uma teoria e que Popper assim define:

> O *conteúdo lógico* de uma teoria é a classe de suas consequências, isto é, o conjunto ou classe de todas as proposições que podem ser logicamente derivadas da teoria em questão. [...] O *conteúdo empírico* de uma teoria pode ser descrito como o conjunto ou classe de proposições empíricas excluídas pela teoria, o que significa, no entanto, o conjunto ou a classe de proposições empíricas que contradizem a teoria." (POPPER, 2007, p 19)

Uma teoria com maior conteúdo empírico possui maior potencial de explicação, visto que há muito mais proposições empíricas que podem atuar como possíveis falsificadores (contraexemplos). Fazendo uma adaptação do exemplo clássico sobre os programas de Newton e Einstein, Watkins (1978, pp. 361 a 363) propõe o seguinte exemplo: sejam consideradas duas teorias A e B e suas respectivas formulações.

A: o monarca francês, no tempo t_1, era homem e calvo.

B: o presidente francês, no tempo t_1, era homem, alto e não era calvo.

Consideremos, ainda, o enunciado empírico

C: "o chefe de estado francês, no tempo t_1, não era alto"

Apesar de dizer respeito ao objeto de estudo da teoria A, a proposição C não pode ser considerada como um falseador; de fato, A é uma teoria com fraco conteúdo empírico. Com relação à teoria B, o maior potencial explanatório permite que seja mais falseável, identificando-a como uma teoria mais arrojada.

Usando a analogia de forma reversa, o programa de Einstein, por explicar muito mais que as teorias de Newton, está mais sujeito a falseamentos, permitindo, por esse critério, classificá-lo como mais interessante para ser adotado como um conjunto de leis e postulados sobre o mundo.

Dessa maior robustez de um programa com maior conteúdo empírico, deriva o terceiro item da classificação de teorias: a aproximação da verdade. Popper, antecipando críticas de adeptos de uma visão idealista da ciência, deixa claro que sua interpretação "não pressupõe que a realidade seja como nossas teorias científicas a descrevem; mas pressupõe que existe uma realidade e que nós e nossas teorias podemos nos aproximar cada vez mais dela." (POPPER, 2007, p. 21)

O processo de tornar a teoria mais e mais adequada para descrever a realidade é proposto por Popper em um modelo de quatro etapas para a prática científica:

O problema inicial;

Construção de teorias provisórias;

Tentativa de eliminação por meio de discussão crítica, incluindo testes experimentais;

Os novos problemas que surgem da discussão crítica dessas teorias.

Sem muita dificuldade, são identificadas consonâncias dessas etapas com a heurística de Lakatos. Musgrave sintetiza, dizendo: “O que ele [Lakatos] fez com a noção de "poder heurístico" é nos dar uma explicação falsificacionista do que é desenvolver uma teoria e defendê-la contra a crítica.” (MUSGRAVE, 1978, p. 190)

O anseio de explicar a natureza, no caso das ciências, ou a busca pelo rigor dos fundamentos, no caso da matemática, agem como motores de um procedimento heurístico que resulta na sofisticação das teorias e das provas matemáticas, perceptíveis no aumento de conteúdo registrado a cada nova formulação.

A sofisticação de uma demonstração matemática após a refutação da anterior leva ao incremento de conteúdo que, por sua vez, a torna mais propensa a refutações, mantendo a dinâmica pensada por Lakatos.

No estudo das provas do teorema de Euler para poliedros, presente em P&R, o incremento de conteúdo se faz notar a cada nova formulação que se faz, seja com a intenção de expurgar os contraexemplos ou de ampliar o domínio de validade para admiti-los.

O enunciado original do teorema “para todo poliedro, $V - A + F = 2$” é reescrito, após algumas refutações, como “$V - A + F = 2$, para todo poliedro que não tem cavidades, túneis ou estruturas múltiplas”.

Na definição atualizada, há um aumento de características que não estavam anteriormente presentes, ao mesmo tempo, em que permite a discussão de alguns casos que, antes, simplesmente não seriam considerados. Isso ocorre porque o conceito anterior, ingênuo, era suficientemente indeterminado (um tipo de indeterminação, porém, que se baseava na incapacidade de imaginar casos mais complexos).

A definição ingênua de poliedro, que em muitos casos nem chega a ser explícita, ficando associada a uma intuição da forma de alguns objetos, pode ser mais ou menos abrangente dependendo da intenção de cada autor que a emprega. Por exemplo, se forem considerados somente os poliedros convexos ou ainda somente os platônicos, o conjunto de entes que podem ser denominados poliedros é diferente.

A sofisticação a que somos conduzidos pelos contraexemplos, e pela análise da prova, permite que ampliemos a extensão do conceito do termo poliedro por meio de um aumento no conteúdo lógico do conceito.

Esta formulação com mais conceitos impulsiona a evolução das explicações do que se entende por poliedro, polígono, cavidade, túnel etc. e torna a teoria mais robusta, com um cinturão protetor mais amplo, para usar o jargão de Lakatos em sua Metodologia dos programas de pesquisa científica.

Uma teoria com mais conteúdo aumenta, por outro lado, a possibilidade de testes e críticas, reforçando o comportamento heurístico de seu desenvolvimento. Os contraexemplos capazes de refutar uma teoria robusta normalmente são muito mais elaborados do que aqueles que confrontam uma teoria ingênua.

3.4 ESTRATÉGIAS DE DEFESA DO TEOREMA E DE SUA PROVA. EXPERIMENTOS MENTAIS.

Após os comentários relativos a questões mais amplas do trabalho de Lakatos (os modelos de verdade, a heurística e suas implicações no rigor e no incremento de conteúdo), atingimos o estágio inicial do debate dos personagens de P&R. Partindo da primeira formulação do teorema e de sua prova, os alunos da utópica sala de aula assumiram posições diferentes: enquanto Alpha e Gamma se alternavam na proposição de contraexemplos, Delta, Beta, Rho e outros procuravam garantir a validade da conjectura e de sua demonstração.

A próxima seção trata de investigar as estratégias de impedimento e ajuste das anomalias que Lakatos apresenta em sua reconstrução histórica, servindo como um recurso retórico e dialético para que se chegasse ao método de provas e refutações.

3.4.1 ESTRATÉGIAS DE IMPEDIMENTO OU AJUSTE DE MONSTROS E EXCEÇÕES

Por que Lakatos considera inadequadas as atitudes intelectuais que pretendem deixar de fora do domínio de interesse as anomalias? Nesta etapa nos dedicaremos a avaliar as características das estratégias de impedimento ou ajuste de monstros.

A primeira estratégia, denominada de “rendição” ou “desistência”, é promovida pelos propositores dos contraexemplos (o primeiro contraexemplo apresentado é o “cubo oco”, ou “par de cubos encaixados”[39]) e pode ser identificado nas conclusões lógicas a partir das seguintes proposições.

A: Todo poliedro é euleriano (isto é, $V - A + F = 2$ é válido para qualquer poliedro).

B: Se o cubo oco é um poliedro, então é euleriano.

C: O cubo oco não é euleriano.

Por ora, a não-eulerianidade do contraexemplo ainda não leva à rendição, pois pode ser extraída a conclusão “o cubo oco não é poliedro”. No entanto, se for considerada outra proposição auxiliar dada por

D: O cubo oco é poliedro.

Nesse caso, a sentença $(C \wedge D)$ leva à negação de B e, na sequência, à falsidade da primeira premissa, fazendo com que a conjectura – em sua formulação original – tenha de ser rejeitada em absoluto.

Um procedimento que meramente descarta a conjectura pela identificação de um contraexemplo teria lugar em uma abordagem “ultra-falibilista”, como Lakatos chama os seguidores extremos da teoria popperiana, trazendo como consequência o desperdício de todo o raciocínio realizado até a formulação da conjectura e do experimento mental que a pretende corroborar.

A alternativa heurística chama a atenção para duas réplicas à estratégia extrema de rendição: primeiro, mesmo que se admita que o teorema não seja válido para o contraexemplo apresentado, ele continua valendo para outros objetos que podem ser investigados quanto a propriedades comuns; em segundo lugar, a pertinência do contraexemplo ao conjunto dos poliedros “genuínos” pode ser colocada como um ponto a ser avaliado.

Esse comportamento leva à próxima estratégia, de autoria do aluno Delta, no texto de Lakatos; ao invés de rejeitar a conjectura, sugere a sua manutenção, pela exclusão do contraexemplo que a afronta. O nome pitoresco desta estratégia é, no original, “monster-barring”, tendo sido adotada a tradução como “impedimento de monstros”.

---

[39] Vide seção 2.4.3

Os monstros, aberrações ou anomalias são quaisquer elementos introduzidos como potenciais contraexemplos, mas que devem ser excluídos do conjunto dos objetos para os quais a conjectura continua valendo. Um ponto positivo dos adeptos do impedimento de monstros, do ponto de vista da heurística, é a sofisticação constante da definição do conceito “poliedro”, necessário para realizar o crivo e, consequentemente, manter os monstros do lado de fora de um reduto cada vez mais restrito. Como tratado há pouco, na seção 3.2.2, isso possibilitou aos matemáticos modernos estipular, com muito mais detalhes, as exigências para que um elemento seja considerado membro de dado conjunto.

Apesar disso, Lakatos considera que esta estratégia corre o risco de se tornar um desafio talvez infindável entre formuladores de contraexemplos e uma elite que trace os limites dogmáticos do que pode ou não ser considerado um “verdadeiro poliedro”.

O “impedimento de monstros” não é suficientemente criterioso. Criteriosa será a estratégia de análise da prova, que pretende, em vez de simplesmente barrar o monstro, traçar mais claramente os limites da conjectura. Antes porém de se chegar a esta etapa, temos uma versão menos drástica do impedimento de monstros: o impedimento de exceções, que não elimina os contraexemplos (cubo oco, poliedros gêmeos, ouriço, moldura etc.) do conjunto dos poliedros, mas tão somente reformula o enunciado da conjectura para se restringir aos exemplares “bem comportados”.

Outra versão ainda menos rígida, chamada de ajuste de monstros, reconhece a existência das anomalias, mas propõe uma reinterpretação dos objetos, com o objetivo de adaptá-los às propriedades dos poliedros eulerianos genuínos. É o caso do contraexemplo chamado de ouriço (Figura 6) que pode ser entendido como constituído de doze faces pentagonais estreladas ou sessenta faces triangulares.

Ainda sob uma ótica heurística, uma deficiência do impedimento de monstros ou de exceções e mesmo do ajuste de monstros é a limitada tentativa de manutenção ou reescrita do teorema sem observar as características de sua prova. Por concentrarem-se nas anomalias e no teorema, essas estratégias perdem de vista um elemento importantíssimo do processo: a prova.

A prova deve ser considerada sempre que um contraexemplo coloca o teorema em cheque, pois é esta análise cuidadosa que determinará as necessárias reformulações do enunciado, com a incorporação de lemas que levem à aceitação ou à recusa dos “monstros” no conjunto dos objetos para o qual o teorema tem validade.

O método de incorporação de lemas não pretende descartar as anomalias por um recurso de modificação de definições ou do enunciado, mas verifica cuidadosamente a prova para identificar quais de seus estágios (lemas) são invalidados pela refutação em questão. O procedimento seguinte é a modificação para que o novo teorema, aperfeiçoado, não mais seja afetado pelo contraexemplo.

A inovação do método de Lakatos é mudar o foco para a prova e sua análise, admitindo uma flexibilidade tanto nos conceitos como nas operações mentais. Uma prova não é um ente estático nem deve ser dogmaticamente definido; deve ser, ao contrário, um terreno fértil para as modificações que permitem à teoria evoluir.

3.4.2 OS EXPERIMENTOS MENTAIS: ELEMENTOS BÁSICOS DE UMA MATEMÁTICA EM EVOLUÇÃO

Finalmente, nesta ordem invertida dos comentários de temas selecionados de P&R, chegamos à conjectura de Euler e à demonstração – ou experimento mental – de Cauchy. A escolha da conjectura de Euler, como já mencionado, foi uma sugestão dada a Lakatos por George Pólya e acabou por se verificar muito propícia, já que trajetória histórica deste tema na história da matemática é vasta, com diversos momentos de conflito[40].

Outros exemplos da matemática poderiam ter sido escolhidos e, como já mencionado, Lakatos realmente fez um estudo de caso sobre um tema voltado a propriedades de funções. Uma vantagem do teorema de Euler sobre poliedros é a razoável simplicidade dos objetos matemáticos envolvidos, permitindo que se desse mais destaque às questões gerais da filosofia da matemática que a jargões e tecnicismos.

Uma questão importante para Lakatos na proposição do método de provas e refutações era explicar o que vem a ser uma prova matemática e qual é sua estrutura para, assim, ampliar o estudo sobre seu papel no desenvolvimento da ciência.

Um ponto de partida é dizer que uma prova é dada pela fragmentação de uma conjectura em uma coleção de subconjecturas que devem ser estudadas

---

[40] A riqueza do assunto é perceptível ainda em estudos atuais, na teoria de grafos, por exemplo, que faz uso das propriedades de malhas de polígonos tais como a obtida no experimento de Cauchy.

individualmente, podendo se mostrar falsas, sem que isso signifique a ruína de todo o processo.

Essa concepção se aproxima claramente da definição da análise, um procedimento que quase sempre é considerado no par análise-síntese e cuja interpretação clássica se encontra na obra de Pappus:

> A análise é o caminho que parte daquilo que é procurado – considerado como se fosse admitido – e segue, em ordem, através de seus concomitantes [consequências], até algo admitido na síntese. Pois, na análise, supomos o que é procurado como já tendo sido feito e investigamos aquilo do qual ele resulta, e de novo qual é o antecedente deste último, até que, no nosso caminhar para trás, alcancemos algo que já é conhecido e primeiro na ordem. A tal procedimento chamamos de análise, por ser uma solução de trás para frente. Na síntese, por outro lado, tomamos como já feito aquilo que na análise foi por último alcançado e, arranjando em sua ordem natural como consequente o que antes era antecedente e conectando-os uns aos outros, chegamos por fim à construção da coisa procurada. E a isso chamamos síntese. A análise é de duas espécies. Uma procura a verdade, sendo chamada teorética. A outra serve para produzir o que se desejava fazer, e essa é chamada problemática. Na espécie teorética, supomos a coisa procurada como existindo e sendo verdadeira, e então passamos em ordem pelos seus concomitantes [consequências], como se fossem verdadeiros e existentes por hipótese, até algo admitido; então, se aquilo que é admitido é verdadeiro, a coisa procurada é também verdadeira, e a prova será o reverso da análise. Porém, se chegarmos a algo que é falso admitir, a coisa procurada também será falsa. Na espécie problemática, supomos a coisa desejada como sendo conhecida e então passamos, em ordem, pelos seus concomitantes [consequências], como se fossem verdadeiros, até algo admitido. Se a coisa admitida é possível ou pode ser feita, isto é, se ela for o que os matemáticos chamam de dado, a coisa desejada será também possível. A prova será novamente o reverso da análise. Mas se chegarmos a algo impossível de admitir, o problema será também impossível. (PAPPUS apud HINTIKKA & REMES, 1976, p. 255)

Lakatos se vale de uma reconstrução deste método no último capítulo de sua tese de Ph. D., em que acrescenta uma continuação do debate entre os alunos de P&R. Retomando a prova de Cauchy para o teorema de Euler, o aluno Psi acusa o Professor de trapaça e diz que não se provou nada além de “para um triângulo, $\mathrm{V}-\mathrm{A}+\mathrm{F}=1$”.

O argumento de Psi é o seguinte: a proposição inicial (P), que se desejava provar, foi apresentada como “$\mathrm{V}-\mathrm{A}+\mathrm{F}=2$ para todo poliedro.” Desta se inferiu a proposição $(\mathrm{P}1)$ que diz “$\mathrm{V}-\mathrm{A}+\mathrm{F}=1$ para toda malha poligonal plana”, sendo que foi utilizado como premissa o lema “todo poliedro é simples” $(\mathrm{Q}1)$. Disto seguiu a proposição ($\mathrm{P2}$) “$\mathrm{V} - \mathrm{A} + \mathrm{F} = 1$ para toda malha triangular”, usando o lema “todas as faces são simplesmente conexas” ($\mathrm{Q2}$) chegando-se, finalmente, à proposição ($\mathrm{P3}$) que afirma “$\mathrm{V} - \mathrm{A} + \mathrm{F} = 1$ para um triângulo”. O personagem, incomodado, conclui que foi obtida uma conclusão indubitavelmente verdadeira a partir de premissas falsas, já que nem todo poliedro é simples (ver o contraexemplo 4 – a moldura, na seção 2.4.4) e nem sempre todas as faces de um poliedro são simplesmente conexas (ver o contraexemplo 5 – o cubo encristado, na seção 2.4.7).

O aluno Gama tenta oferecer uma solução, dizendo que Psi havia descrito apenas a etapa da análise que deveria ser “trivialmente invertida e deduzir de forma válida P da premissa certamente verdadeira $\mathrm{P3}$ e dos lemas $\mathrm{Q1}$ e $\mathrm{Q2}$.” A sugestão de Gamma é descrever a síntese como uma cadeia de deduções da seguinte maneira:

(i) Partindo da proposição “$\mathrm{V} - \mathrm{A} + \mathrm{F} = 1$ para qualquer triângulo” ($\mathrm{P3}$), se obtém “$\mathrm{V} - \mathrm{A} + \mathrm{F} = 1$ para toda malha triangular” ($\mathrm{P2}$),

(ii) Admitida a relação $V - A + F = 1$ para toda malha triangular plana, esta é estendida para malhas poligonais planas ($P1$), em que as faces não necessariamente são triangulares. No entanto, deve ser considerado que esta malha não possui faces anelares, isto é, as faces devem ser simplesmente conexas (Q'_2);

(iii) Como última passagem, dada a validade de $V - A + F = 1$ para a malha poligonal e considerando que esta malha corresponda à planificação de um poliedro simples, após a retirada de uma face (Q'_1), a inserção de uma face permite obter o poliedro em que o incremento de uma unidade na quantidade de faces faz com que $V - A + F = 2$, como afirma a proposição P.

O diagrama apresentado para ilustrar a proposta é o seguinte:

Análise:

$$\begin{array}{ccccccc} P & \rightarrow & P_1 & \rightarrow & P_2 & \rightarrow & P_3 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & Q_1 & & Q_2 & & \end{array}$$

Síntese:

$$\begin{array}{ccccccc} P_3 & \rightarrow & P_2 & \rightarrow & P_1 & \rightarrow & P \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & Q'_2 & & Q'_1 & & \end{array}$$

A aparente solução de Gama é incorreta e logo o aluno Alpha assinala que “a inversão não é trivial” e que as inferências da análise não são necessariamente as mesmas da síntese nem devem ser dispostas necessariamente na mesma ordem.

As deduções de Gama se valem de lemas auxiliares (Q'_1 e Q'_2) que já haviam sido refutados por contraexemplos e a cadeia dedutiva só poderia ser empregada no domínio de validade de poliedros “bem comportados”, rejeitando-se as anomalias.

Lakatos (1990, p. 74), ao discorrer sobre o método de análise-síntese, aponta que uma característica deste procedimento é a percepção de que “uma conjectura falsa pode ser refutada, mas não aperfeiçoada”, pois, como dito por Pappus, a análise “parte daquilo que é procurado – considerado como se fosse admitido – e segue, em ordem, [...] até que, no nosso caminhar para trás, alcancemos algo que já é conhecido e primeiro na ordem”. Se a análise precisa iniciar considerando o que é procurado como se já fosse conhecido, uma conjectura falsa não permite sequer este primeiro passo.

Um exemplo de uma conjectura falsa seria a afirmação: “é possível dividir um quadrado em três partes triangulares congruentes[41]” e, para se adotar o método de análise o ponto de partida seria uma figura dada por um quadrado, constituído de três regiões triangulares congruentes. Como isso é impossível, não se pode realizar a análise em que “as únicas provas que podem ser encontradas são aquelas que envolvem um axioma ou uma proposição já provada” e que levaria a proposições “já conhecidas e primeiras na ordem”. A alternativa, em um caso como este, é a refutação da conjectura.

No caso da conjectura de Euler, a conjectura inicial (ingênua, como diz Lakatos) não é refutada, pois ela se constata verdadeira, pelo menos para uma amostra de poliedros convexos (cubo, tetraedro etc.), assim, a análise pode ser feita, partindo-se desses casos regulares. A ocorrência posterior de contraexemplos não impele à refutação sumária da conjectura, mas permite avaliar a delimitação de seu âmbito de validade ou ainda a reformulação do próprio teorema.

[41] A refutação desta conjectura está contida no teorema que leva o nome do matemático Paul Monsky (1936-), que diz que um quadrado não admite uma equidissecção ímpar, isto é, não é possível fracionar um quadrado em uma quantidade ímpar de triângulos congruentes.

Citando Descartes, Lakatos sugere que os geômetras gregos eram conscientes das limitações do método e optaram por não manter registros de suas tentativas mal sucedidas, compilando apenas os teoremas que, após o processo, pudessem ser devidamente escritos como provas (sintéticas) genuínas:

> Era somente a síntese que os gregos empregavam em seus escritos, não porque eles eram totalmente ignorantes a respeito do método analítico, mas em minha opinião, porque lhe estabeleciam um valor tão alto que desejaram guardá-lo para si mesmos como um segredo importante. (DESCARTES apud LAKATOS, 1997d, p. 75)

Neste método, o maior potencial heurístico está, portanto, na primeira etapa, a análise. Antes, porém, de prosseguir com as ideias de Lakatos sobre o tema, tomaremos duas visões sobre o método analítico: inicialmente, uma distinção entre o procedimento de Pappus e de Descartes; depois, um estudo metodológico feito por Bernard Riemann.

Em uma réplica a Mersenne, Descartes apresenta sua concepção de análise e síntese em uma atualização da tradição de Pappus:

> A análise mostra o verdadeiro caminho pelo qual a coisa em questão foi descoberta metodicamente e como era a priori... se o leitor não conseguir perceber mesmo o menor detalhe, não verá a necessidade da conclusão. A síntese emprega um método diretamente oposto em que se busca como [a coisa] é a posteriori. Ela demonstra a conclusão claramente e emprega uma longa série de definições, postulados, axiomas, teoremas e problemas. (DESCARTES apud RAFTOPOULOS, 2003, p. 271)

Não restrito à matemática, mas em um aspecto mais amplo, a demonstração analítica parte do conhecimento do fenômeno percebido em direção às condições para sua existência (dos efeitos para as causas), enquanto a síntese toma um percurso que assume os princípios ou leis naturais e delas deriva as conclusões (das causas para os efeitos).

Raftopoulos (2003) menciona que o uso do verbo *demonstrar* feito por Descartes ao tratar tanto da análise como da síntese pode gerar certa confusão, que é facilmente solucionada ao entender em um caso como prova e, no outro, como explicação. Com essa interpretação, justifica-se a ênfase dada à análise como “o melhor e mais verdadeiro método de instrução” (AT. VII 156) que tem como maior vantagem permitir que o leitor possa acompanhar o processo de descoberta e saber como os princípios foram derivados das investigações.

Com certa dose de exagero, Arnauld e Nicole afirmam que há dois tipos de métodos:

> aquele dedicado à descoberta da verdade é chamado de análise ou método da resolução ou método da invenção; o segundo usado para fazer os outros entenderem a verdade é chamado de síntese ou de método da composição ou de método da instrução. (ARNAULD e NICOLE, 1724, p. 302 apud RAFTOPULOS, 2003, p. 283)

Em uma classificação como essa, parece que a síntese é redundante e pode ser entendida como um mero recurso pedagógico para se apresentarem de forma sequencial as proposições que levam dos elementos mais básicos até a resolução do problema ou até a verificação da proposição estudada.

Uma comparação do método cartesiano com o original de Pappus oferece uma visão a respeito de seus objetivos. Ambos iniciam com a afirmação de que se deve assumir a solução do problema como já sabida, mas o objetivo final é distinto; Pappus precisa das proposições e construções auxiliares para chegar a um axioma ou teorema conhecido, enquanto Descartes precisa fazer isso para poder nomear todas as linhas e ângulos relevantes para a solução do problema e manipulá-los como se fossem conhecidos, aplicando-lhes todas as operações conhecidas a que linhas são susceptíveis.

O estudo da geometria, na época de Pappus, dedicava-se às figuras, suas propriedades, seus elementos componentes e suas construções; a análise pappusiana, neste aspecto, buscava entender as relações entre objetos geométricos. No caso de Descartes, um dos pioneiros da chamada Geometria analítica, as figuras eram vistas não somente em seu aspecto gráfico, mas como representações visíveis de equações geométricas; a análise cartesiana pretendia entender como se relacionavam pontos, retas e curvas com variáveis e equações algébricas.

A etapa da síntese de Pappus começa a partir dos axiomas que se deduziram para chegar à resposta do problema, em um processo de construção geométrica. O segundo passo da análise de Descartes consiste em comparar o conhecido com o desconhecido, de modo a encontrar as proporções ou dependências entre os objetos relevantes que resultarão em expressões generalizantes; por exemplo, se a análise de uma curva parabólica particular permitiu identificar uma expressão polinomial que a representa ($y = ax^2 + bx + c$), várias outras curvas parabólicas poderão ser estudadas, bastando definir uma escolha arbitrária dos coeficientes (a, b e c).

Buchdahl (1963) já havia estabelecido uma classificação entre a análise no sentido usual da álgebra, como o processo de obter as expressões envolvendo grandezas, relacionado ao gráfico de curvas (análise$_1$), a análise no sentido mais amplo da palavra, isto é, como partição de um todo (análise$_2$) e o procedimento de Pappus de assumir a solução do problema como já conhecida (análise$_3$).

Sofisticando a classificação, Raftopoulos acrescenta outra categoria que engloba as anteriores, produzindo um método único, a análise$_D$.

> A análise$_D$ começa com a análise$_2$, para exibir as unidades mais simples: os segmentos de reta. Então assumimos que todos os segmentos de reta são conhecidos (análise$_3$) e os identificamos. Finalmente, a tarefa passa a ser encontrar as relações de dependência entre esses segmentos, o que é feito operando algebricamente com os símbolos (análise$_1$). Essas relações assumem a forma de equações nas quais as incógnitas são expressas em função das grandezas conhecidas. (RAFTOPOULOS, 2003, p. 294)

Compreendendo que a análise cartesiana é tal como descrita acima, a síntese parece ser mesmo dispensável, a não ser para permitir uma redação mais ordenada das teorias e resoluções de problemas. A análise$_D$ constitui um circuito fechado, tal como indicaremos adiante, apresentando a proposta de Lakatos.

Retomando as considerações feitas por Lakatos, temos a sua avaliação de que “o ponto principal a respeito da análise-síntese clássica é que ela conecta informações conhecidas e desconhecidas por uma cadeia de dedução.” (LAKATOS, 1997d, p. 76) Neste circuito, valores de verdade (e de falsidade) podem ser inseridos e são transmitidos nesta circulação.

Na figura a seguir indica-se a representação feita por Lakatos para o que chamava de circuito de Pappus, isto é, o método de análise e síntese clássico: vale ressaltar que o termo “hipótese” é utilizado para indicar uma conjectura ou proposta de solução de um problema apresentado e que os processos em ambos os sentidos são indicados como sendo deduções, em virtude de se pretender a obtenção de conclusões verdadeiras a partir da inserção de valores de verdade nas premissas.

Por exemplo, quando aquilo que é procurado é considerado como já sabido, todas as relações existentes entre os objetos matemáticos são premissas verdadeiras cujas conclusões são as proposições mais básicas. Invertendo a ordem, na síntese pappusiana, o valor de verdade é inserido nos axiomas, dos quais se deduzem as propriedades que se queriam demonstrar, na forma ortodoxa do método euclidiano.

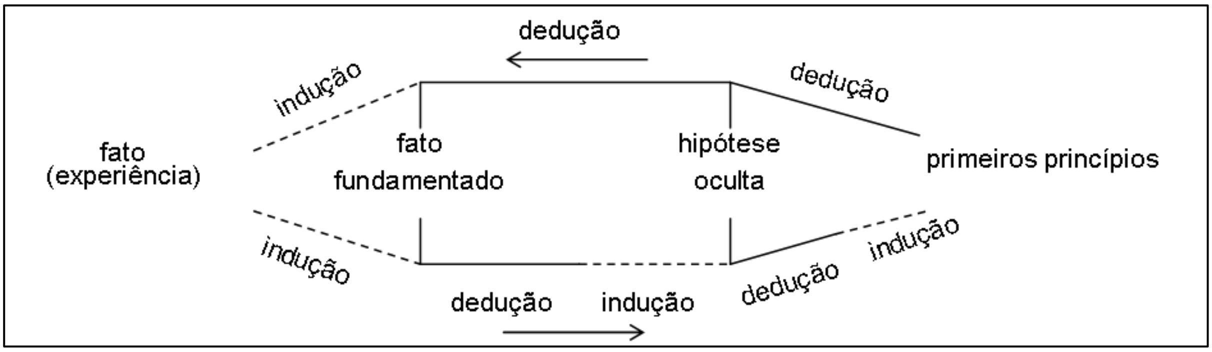
O programa euclidiano clássico é antiempírico e altamente crítico em relação aos dados obtidos pelos sentidos; as proposições indubitáveis devem ser obtidas apenas pela intuição infalível do intelecto. Na ciência moderna, no entanto, dois fatores surgem:

- novo tipo de proposição admitida com valor de verdade: o *fato fundamentado*. Por exemplo, a física moderna toma como válidas afirmações como "a Terra é esférica" e "os corpos no vácuo têm a mesma aceleração". Nenhuma dessas sentenças é verificada empiricamente de forma direta, nem é resultado de deduções a partir de princípios primeiros. Pelo contrário, são resultados de medições indiretas, mas assim que sua validade é aceita, passam a ser sustento para o desenvolvimento de outras proposições.

- novo tipo de proposição questionável: a *hipótese oculta*. Esse é caso de afirmações como "todos os corpos atraem-se mutuamente", que não faz parte dos entes primitivos da teoria, mas são essenciais para a construção das leis de funcionamento dos fenômenos. Assim como o fato fundamentado, não são passíveis de observação empírica ou medição direta, mas atuam como elementos de explicação dos fatos analisados.

Com a inserção desses elementos, o método de análise-síntese deve ser empreendido em outro circuito, que Lakatos chama de cartesiano.

Figura 15 – Circuito cartesiano



Fonte: Lakatos, 1997d, p.76

Para Lakatos, há duas críticas importantes contra o circuito cartesiano: i) hipóteses e fatos são colocados em grau de igualdade e ii) não há diferença entre inferências dedutiva e indutiva.

Sobre a primeira questão, Lakatos comenta que

> o objetivo do circuito cartesiano é levar verdade a todos os seus pontos transformando, assim, hipótese em fatos e justificando a antiga assertiva aristotélica de que 'a convicção da ciência pura deve ser inabalável'. [..] nesta estrutura, efeitos e causas; fatos e teorias estão no mesmo nível lógico, e portanto epistemológico (apesar de que não no mesmo nível heurístico). (LAKATOS, 1997d, p. 78)

A concepção de *causa aequat effectu* é verificada no procedimento do próprio Descartes e de alguns expoentes usuários de seu método analítico, como Newton que não encontrava nenhum incômodo em equiparar fatos com primeiros princípios. Isso não quer dizer que os fatos somente eram suficientes para garantir o fluxo de verdade no circuito, mas certamente não significa que "negligenciando a experiência, a verdade poderia saltar da mente como Palas da cabeça de Zeus" (DESCARTES, apud LAKATOS, 1997d, p.78)

Sobre a segunda crítica, o circuito cartesiano também assume certa igualdade entre a indução e a dedução, ambas compreendidas como "inferências baseadas na intuição, que transmitem verdade (das premissas para as conclusões) e retransmitem falsidade (das conclusões para as premissas)." (LAKATOS, 1997d, p.79)

Para vários matemáticos até o século XVI, a Matemática era entendida apenas no âmbito restrito da Geometria euclidiana e da Álgebra elementar. Nesse caso, o circuito de Pappus tem emprego certo e as críticas contra o circuito cartesiano não o atingem, pois – aparentemente – não se identificam fatos que precisam ser fundamentados por indução e não há hipóteses ocultas.

O cálculo, nos séculos XVII e XVIII, trouxe para a matemática os problemas dos elementos do circuito cartesiano, com necessidade de se explicar de forma mais rigorosa a presença dos infinitesimais, por exemplo, ou de algumas propriedades de funções de variáveis complexas.

Já que tanto a matemática como as ciências experimentais estavam todas afetadas pelas críticas ao método, Lakatos (1997d, pp. 88-91) indica os pontos que levaram ao que chama de "colapso" do circuito cartesiano:

a) "A indução não transfere verdade". Com esta afirmação, o circuito é rompido em sua essência e como consequências surgem o abandono da possibilidade de teorias geradas pelos fatos e as alternativas de introduzir uma teoria da probabilidade de hipóteses científicas.

Lakatos faz um comentário contra a recusa explícita da possibilidade de deduzir teoria a partir dos fatos, bem como de não admitir nem mesmo as suavizadas teorias probabilísticas de confirmação; isso, para o autor, corresponde a "jogar fora o bebê junto com a água do banho" (LAKATOS, 1997d, p. 89).

b) Não há "princípios primeiros" e não há "fatos perfeitamente fundamentados". Outro ataque sofrido pelo circuito cartesiano diz respeito à justificabilidade das inserções de verdade. Se não há “princípios primeiros” indubitáveis e não se podem prová-los, o máximo que se pode fazer é refutá-los.

Para Lakatos, os positivistas usavam critérios de demarcação que separavam a Matemática das demais ciências por acreditar que naquela há “primeiros princípios”, mas, em sua percepção, as tentativas fracassadas de estabelecer seus fundamentos mostram que, mesmo na Matemática, há fatos para os quais não se consegue estabelecer fundamentos e princípios primeiros sempre podem ser colocados em dúvida.

Nem o circuito de Pappus, nem o de Descartes são o método definitivo. Lakatos usa essa constatação para fazer apologia à sua própria teoria, que se vale das refutações como potenciais pontos de partida heurísticos para programas de pesquisa progressivos.

Podemos retomar agora o exemplo da conjectura de Euler e do experimento de Cauchy, apresentado em suas três etapas (planificação em uma malha poligonal após a retirada de uma face, triangulação da malha e retirada sucessiva de triângulos até que restasse somente um).

Há, na prova de Cauchy, um nítido procedimento analítico, que toma o problema já resolvido e busca princípios primeiros para garantir sua solução. No entanto, como toma um poliedro particular (um cubo), no início do raciocínio, e chega a um único triângulo, no final da análise; o resultado obtido é bastante fraco e poderia ser dito assim: “se o cubo (P_1) tem a propriedade de ser euleriano (E), isto é, vale $\mathrm{V} - \mathrm{A} + \mathrm{F} = 2$, então o triângulo restante (T_1) tem a propriedade de ser quase-euleriano (E'), ou seja, $\mathrm{V} - \mathrm{A} + \mathrm{F} = 1$”.

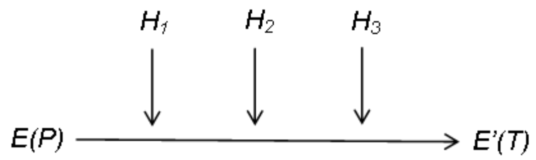
A “conclusão” obtida nesta via analítica é evidente e pode ser verificada por uma mera ação de contagem (qualquer triângulo tem, certamente, três arestas, três vértices e uma face). Da mesa forma, a propriedade do cubo de ser euleriano é constatada pela enumeração de seus vértices, arestas e faces.

Sob este ponto de vista, a prova de Cauchy parte de “o cubo é euleriano” e chega a “o triângulo é quase-euleriano”, não acrescenta nenhuma informação nova e – muito menos – vale como uma prova da conjectura inicial que diz “todo poliedro é euleriano.”

No percurso de apresentação de contraexemplos e refutações, Lakatos identifica um viés heurístico que pretende tornar o experimento de Cauchy válido não somente para o caso específico do cubo, mas para uma classe mais abrangente de objetos.

Esta ampliação do domínio de validade se faz pela inserção de hipóteses auxiliares, a saber: os poliedros considerados devem ser tais que, após a retirada de uma face, possam ser planificados, sem rupturas (H_1); além disso, todas as malhas poligonais obtidas devem permitir uma triangulação que não altere a relação $\mathrm{V} - \mathrm{A} + \mathrm{F} = 1$ (H_2), e, finalmente, quaisquer dessas malhas triangulares devem admitir a retirada sucessiva de triângulos, até o último, ainda sem alterar a dita relação (H_3).

Esquematicamente, a cadeia dedutiva se mostra como abaixo:



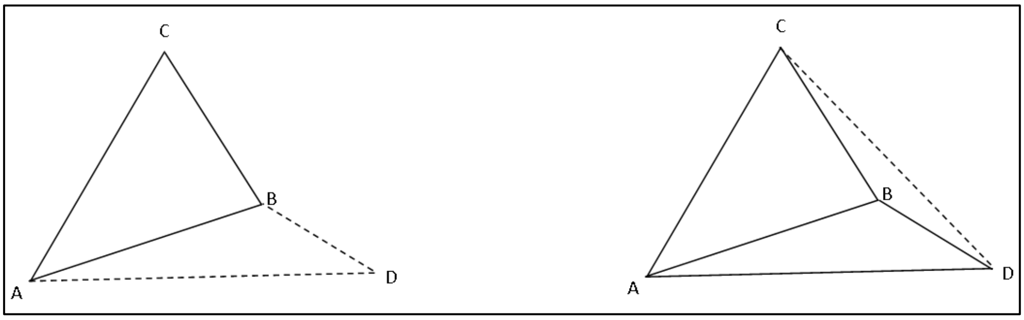
O experimento de Cauchy pode ser reproduzido, consideradas as hipóteses auxiliares, não somente para o cubo, mas para um conjunto de objetos que permitam a execução das etapas, respeitando a manutenção da propriedade de ser quase-euleriano. Assim, a conjectura inicial pode ser admitida para os poliedros homeomorfos a uma esfera e simplesmente conexos, o que é uma ampliação em relação à análise inicial que estudava somente o caso do cubo, porém é uma restrição em relação à conjectura inicial, pois vários poliedros devem ser excluídos pela exigência das hipóteses auxiliares.

Esta é uma característica nuclear do método de provas e refutações: a ideia de de *teorema gerado pela prova*, isto é, após a análise das hipóteses e lemas na cadeia analítica, a conjectura original “para todo poliedro, $\mathrm{V} - \mathrm{A} + \mathrm{F} = 2$”, passa a ser escrita como “se x é um poliedro simples, com faces simplesmente conexas, então $\mathrm{V} - \mathrm{A} + \mathrm{F} = 2$ vale para x.”

Outro aspecto da abordagem de Lakatos é que o processo de síntese da dedução obtida não se dá meramente pela apresentação em ordem inversa das etapas obtidas na análise, mas se mostra como um procedimento de construção do objeto matemático em questão.

A prova, na ordem da síntese, parte do conhecimento de que (i) um triângulo é quase-euleriano, como já comentado há pouco. A etapa seguinte, ainda no âmbito bidimensional, é (ii) a construção, a partir deste triângulo original, de uma malha triangular que mantenha válida a relação $V - A + F = 1$. Este procedimento pode ser feito de duas maneiras: (a) traçando dois segmentos com um ponto comum, partindo de vértices de um triângulo já pertencente à malha, causando o incremento de duas arestas, uma face e um vértice ou (b) unindo dois vértices de triângulos pré-existentes com o acréscimo simultâneo de uma aresta e uma face.

Figura 16 – Construção de malha triangular



Fonte: o autor.

Assim que a malha construída, mantendo a propriedade de ser quase-euleriana, possuir pelo menos três faces triangulares, é possível, pelo (iii) acréscimo de uma face e a transposição para um ambiente tridimensional, a obtenção de um objeto de Cauchy (um poliedro, se o termo não causar confusão), com a propriedade de ser euleriano, já que esta última face não causa aumento da quantidade de vértices nem de arestas (no caso da malha da figura anterior, a nova face seria o triângulo de vértices A, C e D).

O experimento de Cauchy, colocado desta maneira sintética, garante um processo que constrói o objeto e paralelamente elucida os conceitos e incorpora hipóteses auxiliares. As etapas descritas necessitam do entendimento dos termos vértice, aresta, face, bem como das ideias de faces simplesmente conexas e malhas planas quase-eulerianas.

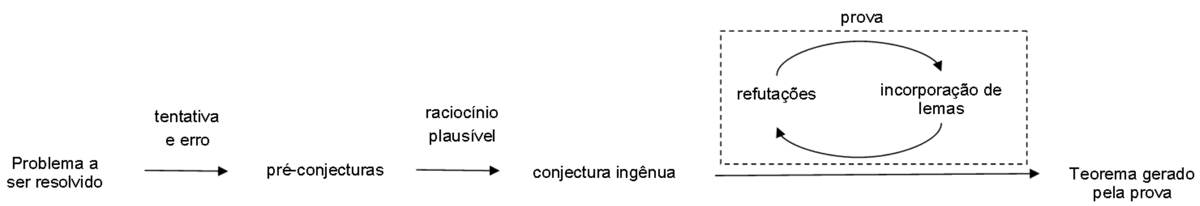
Além de gerar um teorema menos “ingênuo” (apesar de mais restritivo), o método lakatosiano tem uma vantagem colateral que é formular questões que agem como pontos de partida para outras investigações. No caso estudado, a dúvida paira sobre os poliedros que não são contemplados pela prova de Cauchy, isto é, aqueles para os quais a relação $\mathrm{V} - \mathrm{A} + \mathrm{F}$ é diferente de 2.

O que era inicialmente uma afirmação que, de certa forma, buscava fixar o conceito de poliedro, é alterado para uma pesquisa sobre a relação entre as quantidades de vértices, faces e arestas e as consequências para a classificação de diversas categorias de objetos geométricos.

Partindo do estudo particular sobre os poliedros e a conjectura de Euler, Lakatos dá um passo adiante e organiza uma estrutura do desenvolvimento matemático. O início de todo o processo não é um corpo axiomático, mas um problema cuja solução é buscada por tentativa e erro; sendo que as conjecturas somente são formuladas após este estágio primário.

Em seguida, se obtém a conjectura ingênua, que deve ser submetida aos experimentos mentais (provas, testes) e, finalmente, pela incorporação dos lemas, chega-se ao teorema gerado pela prova, que se torna o ponto central de uma teoria ou, na terminologia de Lakatos, o núcleo duro de um programa de pesquisa.

O método de provas e refutações incorpora, então, elementos da análise cartesiana com a preocupação de não empregar suposições arbitrárias, e garantir a geração de um híbrido prova-teorema refutável que pode ser aperfeiçoado progressivamente.



Sem rejeitar um processo de descoberta que se origine em observações factuais e, principalmente, sem exigir uma busca incessante pelos fundamentos do sistema teórico utilizado, Lakatos diz que

> Há um padrão pelo qual se parte da ingênua conjectura popperiana para o <u>método de provas e refutações</u> (não conjecturas e refutações), e então, um passo além, para programas de pesquisa matemáticos. Este padrão rejeita a alegação filosófica de que a fonte de todo programa de pesquisa é sempre uma ampla visão metafísica. <u>Um programa de pesquisa pode vir de uma origem mais modesta.</u> [...] Meu estudo de caso, de certa forma, reabilita a heurística indutivista. [...] A Matemática e a ciência são fortemente inspiradas por fatos, generalizações factuais e, depois, por esta análise dedutiva criativa. (LAKATOS, 1997d, p. 97 – grifos nossos)

O interesse pela resolução de problemas, oriundo da herança grega, se manteve presente no desenvolvimento da ciência moderna. A recomendação de Lakatos é que esta deve ser a preocupação dos estudos sobre o desenvolvimento matemático: como os problemas são (ou podem ser) resolvidos e quais estratégias racionais auxiliam os seres humanos nesses desafios.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um artigo descrevendo características da produção intelectual de Lakatos, escrito por Matteo Motterlini[42], recebeu o título de "*Between the Hegelian devil and the Popperian deep blue sea*" e possivelmente a composição do título foi influenciada pela maneira como o amigo de Lakatos, Paul Feyerabend (apud MOTTERLINI, 1999) o descreveu em uma de suas correspondências: "um grande bastardo – um filósofo nascido de um pai popperiano e uma mãe hegeliana."

O título da publicação de Motterlini é uma adaptação da expressão idiomática "*between the devil and the deep blue sea*", que normalmente é usada para significar uma situação de dilema ou de um perigo inescapável.

Uma provável origem desta expressão está na terminologia naval britânica, já que "*devil*" era um termo antigo para designar a parte não submersa do casco de uma embarcação que fica mais próxima da superfície da água e que, por razões óbvias, deve ser mantida impermeável e sem furos. Quando havia necessidade de uma inspeção ou de manutenção do "*devil*", estando o navio em curso, um tripulante era suspenso por um andaime feito de madeira e cordas até o local designado para fazer o reparo ou calafetação (GARY, 2017).

Apesar do significado da sentença ter se modificado na língua inglesa, estar entre o "*devil*" e o mar profundo, de acordo com esta explicação, corresponde à tensa situação vivida pelos marinheiros que precisavam ficar exatamente nesta posição, tendo à sua frente o casco do navio e, às costas, o oceano, com o objetivo de providenciar o reparo necessário para que o navio pudesse seguir sua viagem.

Exagerando no exercício da analogia, esta seria a sensação de Lakatos ao perceber que a grande nau da filosofia da Matemática precisava de modificações na maneira como estava sendo desenvolvida. O filósofo húngaro ocupou seu lugar na desafiadora tarefa de aperfeiçoar o falibilismo e, simultaneamente, racionalizar as reconstruções históricas.

A contraditória genealogia que Feyerabend atribui ao companheiro deixa de fora, no entanto, a importante influência que as ideias do conterrâneo Pólya exerceu

[42] Matteo Motterlini (1967-) foi responsável pela edição de "*For and against the method*", em 1999, obra que traz uma apresentação das ideias de Lakatos e Feyerabend sobre a filosofia da ciência, acrescida de uma coletânea das correspondências trocadas entre si.

sobre a filosofia da matemática de Lakatos. A heurística foi assumida como uma alternativa para racionalizar o processo de descoberta das conjecturas e para selecionar práticas científicas que levassem à resolução dos problemas, isto é, que permitissem chegar às provas matemáticas.

Aproveitar-se da heurística de Pólya não foi uma ação pouco controversa, já que isso significava admitir aspectos indutivistas, claramente rejeitados pela tradição popperiana em que Lakatos se encontrava (apesar de suas críticas a uma interpretação inflexível da teoria de Popper). A solução para construir seu edifício com blocos tão distintos foi empregar a máxima bíblica que o autor coloca na fala do aluno Kappa: “examinai tudo, retenha firmemente o que for bom.” (LAKATOS, 1977, p. 23)

Da teoria de Popper foi retida a importância do falseamento percebido no valor que é dado às refutações, mas, para Lakatos, uma refutação não leva a descarte sumário das hipóteses, mas obriga a um procedimento de análise cuidadosa para incorporar os lemas que foram agredidos pelos contraexemplos.

De sua formação original nas universidades húngaras, Lakatos manteve a preocupação com o componente histórico na reconstrução da evolução da ciência, mesmo dizendo que esta reconstrução é uma mera caricatura da história, ousando, porém, inserir este componente no terreno da matemática, paradigma das verdades inabaláveis.

Finalmente, das propostas de Pólya, a heurística foi incorporada como uma metodologia indispensável que mantém o ciclo constante de proposições de conjecturas (problemas a se resolver), elaboração de provas (soluções) e crítica dos resultados obtidos (verificações). Os componentes das obras de Pólya que eram expressamente associados a uma abordagem indutivista foram, nos escritos de Lakatos, reduzidos a um processo investigatório, pré-conjectural e de menor importância no aspecto geral do método.

Claro opositor das escolas que pretendiam estabelecer os princípios definitivos ou critérios de verdade absolutos, Lakatos desenvolve toda a teoria em uma via evolucionária. A matemática – gerada na atividade humana – é estudada quase como um organismo biológico que se desenvolve ao longo da história, sofrendo mutações e, por um processo de seleção, mantendo em uso os conceitos mais adaptados, que tenham passado pela “seleção natural” das refutações.

O método de provas e refutações não se apresenta como um conjunto de instruções para instruir a ação dos matemáticos, mas se apresenta como uma maneira de observar e compreender como a atividade matemática se dá na história.

Considerando a indagação “o que é a matemática?”, Lakatos ensina que a matemática existe como um corpo de saberes, como uma linguagem, como um fenômeno humano e os matemáticos cumprem o papel de mantê-la em movimento, elaborando conjecturas, provas e contraexemplos.

Para demarcar a extensão de atuação de seus próprios estudos, também deixa claro o que não corresponde à matemática, aquilo que ela não é. A matemática, na filosofia de Lakatos não é o reduto das proposições certas e verdadeiras. Pode parecer desnecessário afirmar isso após os teoremas de Gödel, mas o século XX foi palco de muitas tentativas de uma espécie de reestabelecimento da matemática como bastião dos entes e proposições verdadeiros.

Lakatos se aproxima, neste aspecto, das ideias de Tarski (1969, p. 77) quando diz que “a prova ainda é o único método usado para verificar a verdade das sentenças dentro de qualquer teorema matemático específico”, mas é necessário estar ciente de que “o processo de extensão de uma teoria pode ser repetido arbitrariamente muitas vezes e a noção de sentença verdadeira funciona como um limite ideal que nunca pode ser alcançado, mas que tentamos aproximar gradualmente.”

Assim como a questão da verdade, o rigor na matemática também é compreendido como uma característica em constante evolução, que jamais pode ser avaliada anacronicamente, já que os matemáticos de cada época formulam sua particular noção de rigor, que acaba sendo um elemento de impacto na construção das provas. Uma demonstração será dita rigorosa, em determinado tempo e espaço, se atender aos critérios socialmente estabelecidos pela comunidade dos matemáticos.

Considerando que a matemática e suas propriedades são resultados da atividade humana, não há alternativa para a avaliação do progresso da atividade matemática que não seja uma investigação crítica a respeito do processo de conjecturas-prova-refutações. Uma possível resposta de Lakatos à questão “como se dá o progresso na Matemática?” seria: evoluindo de conjecturas ingênuas, pela formulação dos quasi-experimentos, pela refutação pelos contraexemplos, chegando aos teoremas gerados pela prova.

Os escritos de Lakatos sugerem que ele pretendia dedicar seu tempo para apresentar trabalhos novamente dedicados à filosofia da matemática, depois do período em que trabalhou com a proposição da Metodologia dos programas de pesquisa científica, mais voltados para as ciências experimentais. Não é difícil supor que várias das ideias de *Proofs and refutations* seriam mescladas com suas últimas teorias e que teríamos algo como a *Metodologia dos programas de pesquisa matemáticos*. Infelizmente isso não foi realizado até sua morte, em 1974.

Após a realização deste estudo e inspirados pela suposição de uma teoria mais sistematizada de uma filosofia da matemática lakatosiana, apontam-se como propostas de trabalhos futuros a investigação de outros teoremas matemáticos (seus objetos, suas provas e refutações) para produzir reconstruções racionais ou uma pesquisa sobre as evoluções ocorridas após o trabalho de Lakatos a respeito do mesmo tema, isto é, o teorema de Euler para poliedros, em seus desdobramentos na matemática contemporânea.

REFERÊNCIAS

ALBERS, D. J.; ALEXANDERSON, G. L. (ed.) **Mathematical People**: Profiles and Interviews. Wellesley, Massachusetts: A. K. Peters, 2008.

AMBROSE, A. Proof and the theorem proved. In: **Mind**, New Series, v. 68, n. 272 (Oct., 1959), pp. 435-445. Oxford: Oxford University Press, outubro 1959.

ANGIONI, L. **Aristóteles – Metafísica, livros I, II e III** (tradução, introdução e notas), Campinas: IFCH/Unicamp, col. Clássicos da Filosofia: Cadernos de Tradução n° 15, 2008.

BOTTAZZINI, U. **The higher calculus**: a history of real and complex analysis form Euler to Weierstrass. New York: Springer-Verlag, 1986.

CATTANEI, E. **Entes matemáticos e metafísica**. São Paulo: Edições Loyola, 2005.
COURANT, R.; ROBBINS, H. **What is Mathematics?** An elementary approach to ideas and methods. Oxford: Oxford University Press, 1996.

CAUCHY, A. L. **Cours d'analyse de l'École royale polytechnique**. Paris: Imprimerie royale, 1821.

CELLUCCI, C. **Why should the logic of discovery be revived? A reappraisal.** In: IPPOLITI, E. (ed.) Heuristic reasoning. Springer, 2015.

COLTON, S.; PEASE, A. The TM System for Repairing Non-Theorems. In: **Electronic Notes in Theoretical Computer Science**, n. 125, pp. 87–101. Elsevier, 2005

CROMWELL, P. R. **Polyhedra**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

CRUPI, V. **Confirmation**. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), ZALTA, E. N. (ed.), 2015. Disponível em: https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/confirmation/>. Acesso em 03 mar 2017.

CURRIE, G. Lakatos' Philosophy of Mathematics. In: **Synthese**, v. 42. pp. 335-351. Dordrecht (Holanda): D. Reidel Publishing Co., 1979

DESCARTES, R. **Regras para a direção do espírito**. Tradução: João Gama. Lisboa: Edições 70, 1985.

_____________. Discurso do método para bem conduzir a própria razão e procurar a verdade nas ciências. Tradução: Thereza Christina Stummer. São Paulo: Paulus, 2002.

DIDEROT, D.; D'ALEMBERT, J, R. (eds.) **Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, etc**. University of Chicago: ARTFL Encyclopédie Project (Autumn 2017 Edition), MORRISSEY, R.; ROE, G. (eds). Disponível em: <http://encyclopedie.uchicago.edu/>. Acesso em out. 2017.

EULER, L. Specimen de usu observationum in mathesi pura. In: **Novi Commentarii academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae**. São Petersburgo, 1761.

GALILEI, G. **O ensaiador**. Os pensadores. São Paulo: Abril Cultural, 1978.

GILLIES, D. **Lakatos' Criticisms of Popper**. In: KAMPIS, G.; KVASZ, L; STÖLTZNER, M. (eds.) Appraising Lakatos: Mathematics, Methodology and the Man. Dordrecht (Holanda): Kluwer Academic Publishers, 2002.

GLAS, E. **A role for quasi-empiricism in Mathematics Education**. In: MATTHEWS, M. R. (ed.) International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching, Springer, 2014.

GRÜNBAUM, B. **Are your polyhedra the same as my polyhedra?** In: ARONOV, B., BASU, S., PACH, J., SHARIR, M. (eds.) Discrete and Computational Geometry: The Goodman-Pollack Festschrift. Springer, 2003.

HACKING, I. **Why is there Philosophy of Mathematics at all?** Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J. E. Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes. In: **Acta Math**. v. 41, pp. 119-196, 1916.

HEATH, T. L. **The Thirteen Books of Euclid's Elements**. 2ª ed. 1925.

HINTIKKA, J.; REMES, U. Ancient Geometrical Analysis and Modern Logic. In: COHEN, R. S.; WARTOFSKY, M. W. (eds.) Essays in memory of Imre Lakatos. Dordrecht (Holanda): D. Reidel Publishing Co., 1976.

KADVANY, John. A mathematical Bildungsroman. In: **History and Theory**, 28, No. 1: 25–42. 1989.

KANT, I. **Crítica da razão pura**. Trad. Valério Rohden e Udo B. Moosburger. São Paulo: Abril Cultural, 1980. (Coleção os pensadores)

KISS, Olga. Heuristic, Methodology or Logic of Discovery. Lakatos on Patterns of Thinking" In: **Perspectives on Science Cambridge**, MA, MIT Press, 2006. pp.302-317.

KLINE, M. **The Loss of certainty**. Oxford: Oxford University Press, 1980.

KOERTGE, N. **Rational reconstructions**. In: COHEN, R. S. et al. (eds.) Essays in memory of Imre Lakatos. Dordrecht (Holanda): Reidel Publishing Company, 1976.

KUTROVÁTZ, G. Lakatos Philosophical work in Hungary. In: **Studies in East European Thought**, Vol. 60, No. 1/2, The Sociological Tradition of Hungarian Philosophy (Jun., 2008), pp. 113-133. Springer, 2008.

LAKATOS, I. Proofs and refutations (I). In: **The British Journal for the Philosophy of Science**, Londres, v. XIV, n. 53, pp. 1-25, maio 1963.

__________. Proofs and refutations (II). In: **The British Journal for the Philosophy of Science**, Londres, v. XIV, n. 54, pp. 120-139, agosto 1963.

__________. Proofs and refutations (III). In: **The British Journal for the Philosophy of Science**, Londres, v. XIV, n. 55, pp. 221-245, novembro 1963.

__________. Proofs and refutations (IV). In: **The British Journal for the Philosophy of Science**, Londres, v. XIV, n. 56, pp. 296-342, fevereiro 1964.

__________. History of Science and Its Rational Reconstructions In**: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association**, Vol. 1970, pp. 91-136, 1970.

__________. **Proofs and Refutations:** The logic of mathematical discovery. WORRAL, J.; ZAHAR, E. (eds.) Cambridge: Cambridge University Press, 1977.

__________. **A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics**. In: LAKATOS, I.; WORRAL, J.; CURRIE, G. Philosophical Papers: Mathematics, science and epistemology, Vol. 2, Cambridge University Press, 1997.

__________. **Infinite Regress and Foundations of Mathematics**. In: LAKATOS, I.; WORRAL, J.; CURRIE, G. Philosophical Papers: Mathematics, science and epistemology, Vol. 2, Cambridge University Press, 1997.

__________. **What does a mathematical proof prove**. In: LAKATOS, I.; WORRAL, J.; CURRIE, G. Philosophical Papers: Mathematics, science and epistemology, Vol. 2, Cambridge University Press, 1997.

__________. **The method of analysis-synthesis**. In: LAKATOS, I.; WORRAL, J.; CURRIE, G. Philosophical Papers: Mathematics, science and epistemology, Vol. 2, Cambridge University Press, 1997.

LANGLANDS, R. **Is there beauty in mathematical theories?** Disponível em

<http://publications.ias.edu/sites/default/files/ND.pdf>. Acesso em 17 nov. 2017.

LARVOR, Brendan**. Lakatos: an introduction**. Londres: Routledge, 1998.

LHUILIER, S. A. J. Mémoire sur polyedrométrie; contenant une demonstration directe du Theoreme d'Euler sur les polyedres, et un examen des diverses exceptions auxquelles de théoreme esta sujetti. In: **Annales de mathematique pures et appliqués**, v. 3. 1812-1813, p. 169-191

LONG, J. **The Unforgiven: Imre Lakatos' Life in Hungary** In: KAMPIS, G.; KVASZ, L; STÖLTZNER, M. (eds.) Appraising Lakatos: Mathematics, Methodology and the Man. Dordrecht (Holanda): Kluwer Academic Publishers, 2002.

MÁTÉ, A. Árpád Szabó and Imre Lakatos, or the relation between history and philosophy of mathematics. In: **Perspectives on Science**, vol. 14, no. 3. The Massachusetts Institute of Technology: 2006.

MOTTERLINI, M. **Professor Lakatos Between the Hegelian Devil and the Popperian Blue Sea**. In: KAMPIS, G.; KVASZ, L; STÖLTZNER, M. (eds.) Appraising Lakatos: Mathematics, Methodology and the Man. Dordrecht (Holanda): Kluwer Academic Publishers, 2002.

MUSGRAVE, A. **Evidential Support, Falsification, Heuristics, and Anarchism**. In: RADNITZKY, G.; ANDERSSON, G. (eds.) Progress and Rationality in Science. Dordrecht (Holanda): D. Reidel Publishing company, 1978.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **George Pólya**, 2002. Disponível em <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pólya.html> Acesso em 15 mar 2017.

____________. **János Bolyai**, 2004. Disponível em <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Bolyai.html> Acesso em 23 set. 2017

____________. **Bolzano**, 2005. Disponível http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Bolzano.html> Acesso em 05 out. 2017

PÓLYA, G. **How to solve it**. Princeton: Princeton University Press, 1973.

___________. **Induction and analogy in Mathematics: of Mathematics and plausible reasoning**. Princeton: Princeton University Press, 1954.

POPPER, K. R. **Conjecturas e Refutações**. Brasília: Editora da UnB. 1980.

___________. **Objective Knowledge**: An Evolutionary Approach , revised ed., Clarendon, 1981.

___________. **All life is problem solving**. London: Routledge, 2007.

___________. **A Lógica da pesquisa científica**. São Paulo: Editora Cultrix, 2008.

RAFTOPOULOS, A. Cartesian analysis and synthesis. In: **Studies in History and Philosophy of Science**, v. 34 (2003) pp. 265–308.

RITCHEY, T. Analysis and synthesis on scientific method based on a study by Bernhard Riemann. In: **Systems Research**, 1991, Vol. 8, No. 4, pp 21-41.

ROPOLYI, L. **Lakatos and Lukacs**. In: KAMPIS, G.; KVASZ, L; STÖLTZNER, M. (eds.) Appraising Lakatos: Mathematics, Methodology and the Man. Dordrecht (Holanda): Kluwer Academic Publishers, 2002.

SANDIFER, E. How Euler did it: V, E and F, part 2. In: **MAA online**. julho 2004. Disponível em: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2004-07.pdf> Acesso em 20 mar. 2017.

SHABEL, L. **Kant's philosophy of mathematics**. In: GUYER, P. (ed.) The Cambridge companiom to Kant and modern philosophy. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

SIMMONS, G. F. **Differential equations with applications and historical notes**. New Delhi: McGraw Hill, 1979.

SZABÓ, A. **The beginnings of greek mathematics**. Budapeste: Akademiai Kiadó, 1978.

THURSTON, W. P. On proof and progress in mathematics. In: **Bulletin of the American Mathematical Society**, n. 30, pp. 161-177, 1994.

WATKINS, J. **The Propositional Content of the Popper- Lakatos Rift**. In: KAMPIS, G.; KVASZ, L; STÖLTZNER, M. (eds.) Appraising Lakatos: Mathematics, Methodology and the Man. Dordrecht (Holanda): Kluwer Academic Publishers, 2002.

___________. **Corroboration and the Problem of Content-Comparison**. In: RADNITZKY, G.; ANDERSSON, G. (eds.) Progress and Rationality in Science. Dordrecht (Holanda): D. Reidel Publishing company, 1978.

WORRAL, J. Nachruf auf Imre Lakatos: Imre Lakatos (1922-1974): Philosopher of Mathematics and Philosopher of Science. In: **Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie / Journal for General Philosophyof Science**, Vol. 5, n. 2, pp. 211-217. Dordrecht (Holanda): Kluwer Academic Publishers, 1974.

ZALTA, E. N. **Gottlob Frege**. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), ZALTA, E. N. (ed.), 2016. Disponível em: <https://plato.stanford.edu/entries/frege/>. Acesso em 03 out. 2017.